3 1761 00468608 5
UNIVERSITY OF TORONTO

B. G. TEUBNERS LEHRBÜCHER
DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN XXIII

E. BLASCHKE

VORLESUNGEN ÜBER MATHEMATISCHE STATISTIK

(DIE LEHRE VON DEN STATISTISCHEN MASSZAHLEN)

UNIVERSITY
OF
TORONTO
LIBRARY

3644 V

B. G. TEUBNERS SAMMLUNG VON LEHRBÜCHERN
AUF DEM GEBIETE DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN
BAND XXIII

VORLESUNGEN ÜBER MATHEMATISCHE STATISTIK

(DIE LEHRE VON DEN STATISTISCHEN MASSZAHLEN)

VON

Dr. ERNST BLASCHKE

REGIERUNGSRAT IM K. K. MINISTERIUM DES INNERN UND
A. O. PROFESSOR AN DER K. K. TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN WIEN

MIT 17 TEXTFIGUREN UND 5 TAFELN

8/391
1/3/07

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1906

QA
276
B58

ALLE RECHTE, EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Vorwort.

Die Anregung zur Verfassung des vorliegenden Werkes entsprang hauptsächlich einem Unterrichtsbedürfnisse. Mit der Abhaltung der Vorlesungen über mathematische Statistik am Kurse für Versicherungstechnik der k. k. technischen Hochschule in Wien seit dem Jahre 1896 betraut, sah ich mich vor eine nicht unwesentliche Schwierigkeit gestellt. Damit nämlich die Ausdehnung des erwähnten Lehrkurses über mehr als zwei Studienjahre vermieden werde, müssen die genannten Vorlesungen spätestens zu Beginn des 3. Studiensemesters beginnen und demnach auf der Voraussetzung eines nur einjährigen Hochschulunterrichtes in der Mathematik fußen.

Aber auch diese Vorbildung kann nicht bei allen Hörern angenommen werden, wenn die Vorlesungen ihrem Zwecke vollauf entsprechen sollen. Mehr als jedes andere ist das versicherungstechnische Studium prädestiniert, zum Gemeingut aller Studierenden der Hochschulen zu werden: denn mit dem Versicherungswesen tritt dermalen nicht nur der eigentliche Fachmann, welcher in der Regel seine Ausbildung an der sogenannten allgemeinen Abteilung der technischen Hochschule oder an der philosophischen Fakultät einer Universität empfängt, sondern auch fast jeder Leiter eines industriellen oder Verkehrsunternehmens, der Verwaltungsbeamte, der Advokat, der Richter und der Arzt in die innigste Berührung. Jedoch bei den Studierenden anderer Fachschulen der technischen Hochschule oder der juridischen und medizinischen Fakultät gerade die für den Gegenstand taugliche Schulung in den mathematischen Disziplinen voraussetzen, hieße die tatsächlichen Verhältnisse und die Eigenart der Ausbildung durch andere Wissenszweige übersehen.

In Ansehung der Vorbildung jener Hörer des Versicherungskurses, welche das Studium fachgemäß betreiben, konnte mit Erfolg durch die *Anordnung* des Lehrstoffes, also insbesondere durch Verlegung jener Abschnitte der Wissenschaft, in welchen wahrschein-

lichkeits-theoretische Vorkenntnisse nicht erforderlich sind, in das dritte Halbjahr, der übrigen Abschnitte in das vierte Halbjahr des Fachkurses Abhilfe getroffen werden, und zwar insbesondere darum, weil nach dem Studienplan der Versicherungskurse der Wiener technischen Hochschule und der philosophischen Fakultät der Wiener Universität für das dritte Halbjahr das Hören von Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung vorgesehen ist.

Die durch die Beteiligung der Hörer anderer Fachschulen bzw. Fakultäten bedingte Ungleichheit der Vorbildung zu überbrücken, schien jedoch als geeignetstes Mittel ein an die Vorlesungen sich eng anschließendes Lehrbuch. Damit wird dem Studierenden die Möglichkeit geboten, je nach dem Bedürfnisse bei Einzelheiten zu verweilen und — eventuell unter Heranziehung der im Anhange des Buches reproduzierten weiteren literarischen Behelfe — sich entsprechend zu vertiefen.

Mit den die Entstehung veranlassenden Motiven dürften denn auch die Anordnung des Lehrstoffes sowie mancherlei anderweitige Eigentümlichkeiten des Buches ihre Erklärung finden.

Wenngleich mit demselben ein Grundriß der gesamten Disziplin geboten werden soll, so ist darin doch zunächst dem Bedürfnisse des Versicherungstechnikers, nicht aber in gleichem Maße dem des Bevölkerungsstatistikers Rechnung getragen.

Auch daß im Buche die wahrscheinlichkeits-theoretische Begründung des Lebensversicherungswesens allenthalben in den Vordergrund gestellt und den mancherlei berechtigten Einwendungen in die unbedingte Geltung dieser Basis vielleicht nicht genügend Raum gegeben wird, dürfte sich aus dem Zweck des Buches durchaus rechtfertigen lassen. Die darin festgehaltene, sich beim Verfolgen der Entwickelung der Wissenschaft zunächst darbietende Darstellungsmethode führt unzweifelhaft zu größter Vertiefung. Andererseits kann aber auf jener Unterrichtsstufe, für welche das Buch bestimmt ist, nicht das volle Verständnis für Auffassungsweisen der Grundlagen erwartet werden, welche sich in der Regel erst bei eingehender Kenntnis der wahrscheinlichkeits-theoretischen Basis und in aufmerksamster Verfolgung der statistischen Erscheinungen, also in der Praxis entwickeln können.

Der Unterrichtsstufe tunlichst angepaßt erscheinen allenthalben auch die mathematischen Beweise der statistischen Probleme; diesbezüglich glaubte ich, nicht immer den einwandfreieren, aber auch ein reiferes Urteil voraussetzenden Methoden der modernen Darstellung vor den herkömmlichen den Vorzug geben zu sollen.

Die Sterblichkeitstafeln werden in systematischer Darstellungsweise, demnach nicht, wie üblich, nach historischen Gesichtspunkten entwickelt.

In einem einzigen Abschnitte, der Theorie der Ausgleichung, folgt das Buch nicht genau den Vorlesungen. Nachdem ich über den erwähnten Teil der Disziplin schon im Jahre 1893 eine für seine dermalige Entwickelung ziemlich umfassende Abhandlung in den „Methoden der Ausgleichung von Massenerscheinungen", Verlag von Alfred Hölder in Wien, veröffentlicht hatte, empfand ich das lebhafte Bedürfnis der Ausgestaltung und teilweisen Abänderung des Inhaltes dieses Werkes. Ich hoffe in dem erwähnten Abschnitte, wenn auch kein neues Ausgleichsverfahren, so doch eine wissenschaftliche Darstellungsform erbracht zu haben, welche der Entwickelung des darin behandelten Problemes Vorschub zu leisten vermag.

Schließlich erübrigt mir noch, allen Förderern des Buches, insbesondere jedoch dem Institute of Actuaries in London für die Überlassung der Clichés zu den Abbildungen der im Anhange behandelten Goreschen Zählmaschine, sowie der Vereinigten Telephon- und Telegraphen-Fabriks-Aktien-Gesellschaft in Wien für die Ausfolgung der Negative zu den Bildern für die daselbst beschriebene elektrische Zählmaschine und endlich dem Verleger für die gediegene Ausstattung des Werkes zu danken.

Wien, im Juni 1906.

Ernst Blaschke.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Vorwort III

Einleitung 1

I. Abschnitt. **Die Lehre von den statistischen Gesamtheiten.**

§ 1. Die Merkmale der Gesamtheiten 9
§ 2. Die Maßzahlen für gemischte Qualitäten (die Sterblichkeitsziffer) . 11
§ 3. Die Änderungen der Maßzahlen für kleine Unterschiede des Merkmales 15
§ 4. Die Konstanz der statistischen Maßzahlen 19
§ 5. Die Einteilung der Gesamtheiten 20
§ 6. Die einmächtigen Gesamtheiten 22
§ 7. Die zweimächtigen Gesamtheiten (Vorbemerkungen) 26
§ 8. Die Lebendengesamtheiten der Bevölkerungsstatistik 28
§ 9. Die Totengesamtheiten der Bevölkerungsstatistik 30
§ 10. Anwendungen der Theorie der zweimächtigen Gesamtheiten 36
§ 11. Anderweitige Darstellung der zweimächtigen Gesamtheiten 41
§ 12. Die dreimächtigen Gesamtheiten (Vorbemerkungen) 47
§ 13. Die Lebendengesamtheiten der Versicherten 51
§ 14. Die Totengesamtheiten und Sterbenswahrscheinlichkeiten Versicherter 55
§ 15. Die Gesamtheiten und Sterbenswahrscheinlichkeiten Versicherter für eine herrschende Absterbeordnung 56
§ 16. Die Wanderungen 60
§ 17. Die Bildung von Gesamtheiten nach Registermethoden 61

II. Abschnitt. **Die Arten der statistischen Maßzahlen und ihre Ermittlung.**

§ 18. Die intensiven statistischen Maßzahlen 64
§ 19. Die extensiven statistischen Maßzahlen 71
§ 20. Die intensiven statistischen Maßzahlen und die Wanderungen (die Ein- und Austretenden in geschlossenen Gesellschaften) 77
§ 21. Die zusammengesetzten Maßzahlen 83
§ 22. Die Absterbeordnungen einer stationären Bevölkerung 87
§ 23. Die Absterbeordnungen aus den Gesamtheiten der Verstorbenen und Geborenen 92
§ 24. Die Absterbeordnungen aus den Gesamtheiten der Verstorbenen und Lebenden 95
§ 25. Die Absterbeordnungen aus den Jahresberichten der Versicherungsgesellschaften 99

Seite

§ 26. Die Absterbeordnungen aus dem Urmateriale geschlossener Gesellschaften 102
§ 27. Die Rentnertafeln 112
§ 28. Die Invaliditätstafeln und Grundlagen der Unfallversicherung . . . 114
§ 29. Die Krankenordnungen 119
§ 30. Die Heiratstafeln 121

III. Abschnitt. **Die Deutung der statistischen Maßzahlen.**

§ 31. Die statistische Wahrscheinlichkeit (Vorbemerkungen) 123
§ 32. Die Eigenschaften der mathematischen Wahrscheinlichkeiten . . . 128
§ 33. Die Abänderung des Bernouillischen Theorems bei Störung der Grundbedingungen für die reine Wahrscheinlichkeit 132
§ 34. Die Methoden zur Überprüfung der Identität von statistischen und mathematischen Wahrscheinlichkeiten 136
§ 35. Das Vorhandensein einer normalen Dispersion 143
§ 36. Der Normalwert und das Gesetz der Abweichungen der extensiven Maßzahlen 149

IV. Abschnitt. **Statistische Gesetze.**

§ 37. Definition und Methoden der Ableitung statistischer Gesetze . . . 157
§ 38. Die empirischen Darstellungsmethoden statistischer Gesetze 158
§ 39. Die analytischen Darstellungsmethoden statistischer Gesetze 160
§ 40. Die Verallgemeinerung des Gaußschen Fehlergesetzes 162
§ 41. Das Pearsonsche Fehlergesetz 164
§ 42. Die Erklärung der statistischen Gesetze als Funktionen des Gaußschen Fehlergesetzes 167

V. Abschnitt. **Die Anwendungen der Wahrscheinlichkeitslehre im Versicherungswesen.**

§ 43. Vorbemerkungen 171
§ 44. Die Ermittlung statistischer Wahrscheinlichkeiten 173
§ 45. Die Anwendung statistischer Ergebnisse 176
§ 46. Die Versicherungsprämie 182
§ 47. Das mathematische Risiko 185
§ 48. Anwendungen der Theorie des mathematischen Risikos 188

VI. Abschnitt. **Die Theorie der Ausgleichung.**

§ 49. Die Definition der Ausgleichung 192
§ 50. Die Einteilung der Ausgleichsmethoden 197
§ 51. Der erste Fall der Ausgleichung 198
§ 52. Ausgleichung Pearsons durch die Kurvenmomente 202
§ 53. Der erste Fall der Ausgleichung unter Einschränkung der Willkürlichkeit der Konstanten 208
§ 54. Der zweite Fall der Ausgleichung. (Die allgemeine Lösung.) . . . 211
§ 55. Anwendungen zum zweiten Falle der Ausgleichung 213
§ 56. Der dritte Fall der Ausgleichung. (Die allgemeine Lösung.) 222
§ 57. Anwendungen zum dritten Falle der Ausgleichung 224

Seite

§ 58. Die mechanischen Ausgleichskurven 229
§ 59. Die Versuche zur Erläuterung der mechanischen Ausgleichsformeln 238
§ 60. Die mechanischen Formeln als Spezialfälle des dritten Falles der Ausgleichung 240
§ 61. Der vierte Fall der Ausgleichung 245
§ 62. Die Ausgleichung in der Fläche 247
§ 63. Die graphische Methode der Ausgleichung 250
§ 64. Kriterien zur Beurteilung der besten Ausgleichung 251
§ 65. Die Verbindung verschiedener Ausgleichsmethoden 255

Anhang I. Die Maschinen zur Bildung von statistischen Gesamtheiten 257

Anhang II. Werte der Funktion $W_\gamma = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt$ 264

Literaturverzeichnis 265
Berichtigungen 268

Einleitung.

Unter den *Eigenschaften* des Menschen und jenen *Änderungen*, welchen er im Lebensprozesse unterliegt, lassen sich einige an jedem Individuum wahrnehmen, weil sie dem Menschen als solchem inhärent sind, während andere sich bei dem Einzelnen entweder nicht immer oder zumindest nicht immer in gleicher Intensität vorfinden und daher zur Erforschung einer Mehrheit von Individuen, der *Menschenmassen* oder der *Gesellschaft* bedürfen. Je nach diesen Unterschieden sind die Erscheinungen am Menschen nicht nur Gegenstand *verschiedener Wissenschaften*, sondern auch *verschiedener Art der Forschung*. Mit den ersteren beschäftigt sich unter anderen die Anthropologie, Anatomie, Physiologie, Psychologie, mit den letzteren die große Gruppe der *Gesellschaftswissenschaften*.

Die Materie zu den letztgenannten Wissenschaften sammelt die *Statistik*. Die dieser Wissenschaft eigentümliche Forschungsmethode besteht darin, daß zunächst eine *Gattung* von Menschen (ein Typus) durch gewisse charakteristische *Merkmale* definiert, die Zahl der Individuen dieses Typus *festgestellt* und sodann *beobachtet* wird, an wie vielen Individuen eine Eigenschaft oder Änderung *bestimmter* Art, ein Ergebnis, sich findet, um daraus endlich festzustellen, in welchem Maße *die Einheit im Typus* durch das Ergebnis getroffen wird (wie viele Ergebnisse jeder Art auf die Einheit des Typus entfallen).

Die Formen, in welchen die erwähnte Forschungsmethode benützt wird, können überaus mannigfaltig sein. In der *vollständigen und direkten* Methode strebt man *alle* Individuen einer Merkmalgruppe zu erfassen und auf solchen Gesamtheiten die Zählungen aufzubauen. In den *indirekten* Methoden versucht man Eigenschaften, für welche — wie der Volkswohlstand und die Volksgesundheit — ein direkter Maßstab nicht gegeben ist, durch *statistische* Erforschung anderer, ursächlich zugehöriger (oder symptomatischer) Eigenschaften, also abermals auf dem Wege der Zählung, festzuhalten. In den unvoll-

ständigen Näherungsmethoden der Forschung, den *repräsentativen* (versicherungstechnischen) und *typischen* Methoden, werden die Eigenschaften *aller* Individuen einer Merkmalgruppe entweder an einer *willkürlich herausgegriffenen* Menge von *Repräsentanten* oder an *für typisch erachteten* Beispielen dieser Gesamtheiten konstatiert.

Welche Detailform der allgemeinen Forschungsmethode jedoch gewählt wird, immer sind — wie aus den obigen Andeutungen leicht erkannt werden kann — nicht nur das Endresultat der Forschung, sondern auch die sämtlichen Operationen, welche zu diesem führen, *quantitativer* Natur und bedürfen daher zur Darstellung und Fundierung der Mathematik.

Aus der Summe der Anwendungen der letztgenannten Wissenschaft auf die Statistik hat sich ein engeres, geschlossenes Wissensgebiet abgesondert. Die statistischen Ergebnisse werden vielfach zum *Vergleiche der Massen* benützt. Hierzu bedarf es gewisser Werte, welche sich bei Wiederholung der gleichen Voraussetzungen immer wieder finden, *der statistischen Maßzahlen*. Die Wissenschaft, welche sich mit der *Erforschung der möglichen Arten* von Maßzahlen, ihrer *numerischen Feststellung* und *Verwertung* beschäftigt, ist die *mathematische Statistik*.

Von dieser Definition kann man sofort zu einer Übersicht über die *Materie* und damit zu einer *Einteilung* der mathematischen Statistik gelangen.

Die Genauigkeit der Maßzahlen ist wesentlich von der richtigen Bestimmung der Anzahl der Individuen der zugrunde liegenden Typen, der *Gesamtheiten*, bedingt. Der *erste Abschnitt* der Wissenschaft, die *Theorie der Gesamtheiten*, beschäftigt sich daher vor allem mit der *Art ihrer Bestimmung*. Und weil der Aufwand an Arbeit bei der Feststellung der Gesamtheiten in der Regel außerordentlich groß ist und Theorie und Praxis übereinstimmend erwiesen haben, daß oftmals mehrere nach verschiedenen Begriffsbestimmungen gebildete und einen ganz verschiedenen Arbeitsaufwand erfordernde Gesamtheiten zu unmerklich verschiedenen Maßzahlen führen, so werden alle möglichen Gesamtheiten, welche bei der Bestimmung *derselben Maßzahl* oder bei einer *Maßzahlengruppe* für die gleiche Erscheinung verwendet werden können, anzugeben sein. Selbstverständlich ist, daß die zwischen den Gesamtheiten bestehenden Beziehungen die Bildung und Verwendung der Maßzahlen zu fördern vermögen und daher gleichfalls zur Behandlung gelangen müssen.

Im *zweiten Abschnitte*, der Lehre von den Maßzahlen, werden die

Maße für die Eigenschaften und Änderungen am Menschen festzustellen sein. Die Maßzahlen für die *Änderungen* sind naturgemäß unbenannte (relative oder intensive) Zahlen, weil sie die Zahl der Änderungen an der Einheit der Individuen während der Zeiteinheit angeben. Man nennt derartige Verhältniszahlen vielfach Wahrscheinlichkeiten. Solche sind die Sterbenswahrscheinlichkeit, Invaliditätswahrscheinlichkeit, Wahrscheinlichkeit der Erkrankung, Heiratswahrscheinlichkeit usw. Die *Eigenschaften* der Menschen werden oftmals durch den auf die Einheit der Individuen entfallenden Mittelwert der Eigenschaft festgehalten; beispielsweise die Verschiedenheit in der körperlichen Entwicklung der Völker durch die mittlere Leibeslänge, den mittleren Brustumfang, eventuell ein mittleres Körpergewicht; die Verschiedenheit in der Lebensdauer durch die mittlere Lebenslänge. Solche Maßzahlen geben eine gewisse Menge von Millimetern, Kilogrammen, Jahren an und sind daher benannte (absolute oder extensive) Maßzahlen.

Übrigens besteht zwischen den beiderlei Erscheinungen vom statistischen Standpunkte aus nur der Unterschied, daß die letzteren *simultane*, die ersteren *sukzessive* Änderungen an der Masse darstellen. Man kann daher von beiden Arten der *Erscheinungen* als von *Eigenschaften* der Masse sprechen. Beispielsweise wird der biologische Prozeß des Absterbens der Menschen durch das Maß der Sterblichkeit in den verschiedenen Altern verdeutlicht. Für die Maßzahlen folgt daraus, daß man die statistischen Änderungen auch durch benannte Zahlen, die statistischen Eigenschaften auch durch unbenannte Zahlen auszudrücken vermag. So sind die Maßzahlen für die Körperlänge einer Bevölkerung unbenannt, wenn tabellarisch angegeben wird, wie viele von 1000 beobachteten, erwachsenen Individuen bestimmter Altersgrenzen je eine bestimmte Anzahl von Millimetern besitzen. Umgekehrt kann man aus einer Tabelle der Sterbenswahrscheinlichkeiten die mittlere Lebenslänge durch Rechnung finden.

Daraus folgt nun, daß die beiden verschiedenen Gattungen der Maßzahlen nebeneinander behandelt werden dürfen. Man bezeichnet auch die charakteristischen Merkmale, durch welche die Änderung des Menschen an der Einheit des Typus von der Geburt bis zum Tode festgehalten wird, vielfach als *Entwickelungseigenschaften*.

Erfahrung hat ferner gezeigt, daß man die statistischen Maßzahlen und zwar sowohl die benannten, als die unbenannten Maße als Wahrscheinlichkeitsfunktionen, und zwar die unbenannten Maße als reine Wahrscheinlichkeiten, Mittelwerte oder endlich als Komplexe

von Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerten mit konstanten und veränderlichen Grundverhältnissen; die benannten Maße als Fehlerfunktionen auffassen kann. Die Art der Auffassung des Wesens der statistischen Maßzahlen ist aber theoretisch und praktisch von größtem Belange. Im *dritten Abschnitte*, der Lehre von den statistischen Wahrscheinlichkeiten, wird daher zu zeigen sein, welche Auffassungsweisen für die statistischen Maßzahlen bestehen und auf welche Tatsachen sich jede der Auffassungsweisen stützt.

Endlich aber scheint es für den vollständigen Aufbau der Wissenschaft unentbehrlich, darzustellen, welche Folgerungen aus der Natur der Maßzahlen gezogen werden können.

In theoretischer Beziehung gelangt man zu einer gewissen Anschauungsweise über die Zusammensetzung der Gesamtheiten, ferner zur Erklärung der statistischen Gesetze oder Regelmäßigkeiten; in praktischer Beziehung zur Erkenntnis der Grundlagen außerordentlich wichtiger gesellschaftlicher Einrichtungen, der Versicherungsanstalten. Diese Folgerungen werden in zwei weiteren Abschnitten des Näheren erörtert.

In der *Lehre von den statistischen Gesetzen* werden nämlich die verschiedenen Versuche besprochen, die Maßzahlen für die Änderungen derselben Art, jedoch verschiedener Entwicklungsphasen (Alter) des Menschen logisch zu verknüpfen.

In der *Lehre von den Anwendungen der statistischen Maßzahlen* wird gezeigt, in welcher Art und mit welchem Rechte Schlüsse aus den Erfahrungen, sei es für den Vergleich simultaner oder zeitlich folgender Massenerscheinungen zulässig sind.

In einem *letzten Abschnitte, der Theorie der Ausgleichung*, soll der Rückwirkung gedacht werden, welche die Einführung statistischer Gesetze auf die Bestimmung der Größe der statistischen Maßzahlen der einzelnen Alter (als wahrscheinlichster Werte von Wahrscheinlichkeiten) nehmen kann.

Die bisherigen Erörterungen dürften einerseits den Beweis für den vollständig selbständigen Charakter der Wissenschaft, andererseits dafür erbracht haben, daß die mathematische Statistik als Wissenschaft neben der Statistik bestehen könne. Die letztere hat die Zustände und Erscheinungen des gesellschaftlichen Lebens auf Grund der Beobachtungen an den Massen festzustellen; die erstere beschäftigt sich mit den verläßlichen Hilfsmitteln dieser Feststellung. Die mathematische Statistik kann nur beanspruchen als Hilfswissenschaft der Statistik, wie aller angewandten Wissenschaften dieser Disziplin, angesehen zu werden.

Über die Stellung, welche der mathematischen Statistik unter den Gesellschaftswissenschaften zukommt, bestehen in der Literatur keineswegs übereinstimmende Ansichten. Über Inhalt und Zweck der Disziplin haben sich vielmehr vier Anschauungsweisen Geltung verschafft:

1. Die *Süßmilch-Queteletsche* Anschauung. Nach diesen beiden Forschern liegen den Erscheinungen an den Menschenmassen ebenso unabänderliche Gesetze, wie den Erscheinungen im Gebiete der leblosen Natur zugrunde. Nach Süßmilch wird die Gesetzmäßigkeit durch den göttlichen Willen, nach Quetelet durch die Existenz eines menschlichen Typus „des *mittleren* Menschen" erklärt. Das Endziel der Wissenschaft bestehe in der Erkenntnis der Regelmäßigkeiten bezw. der Naturgesetze. Der Spezialfall der Statistik interessiere nur als Beleg. Die Statistik als Wissenschaft sei mit der mathematischen Statistik (der Physik der Gesellschaft) identisch.

2. Zu den gleichen Endresultaten kommt der *Logiker Siegwart.* Nach ihm hat alle Wissenschaft die Aufgabe, die genaue Kenntnis der Dinge zu vermitteln. Dieselbe sei angesichts der großen Anzahl der Forschungsobjekte nur durch *Begriffsbildung* möglich. Die Statistik sei insofern Wissenschaft, als durch sie eine eigenartige Form der Begriffsbildung angebahnt wird. Die *Methode* der Statistik könne nicht nur auf die biologischen und somatologischen Erkenntnisse über den Menschen, sondern im Bereiche der gesamten Naturwissenschaften Anwendung finden und brauche auch bei den Erscheinungen, welche durch den nach Motiven handelnden Menschen veranlaßt werden, nicht halt zu machen.

3. *Georg v. Mayr* nennt die mathematische Statistik (in seiner Statistik und Gesellschaftslehre) jene *Abzweigung* der statistischen Wissenschaft, in welcher die mathematische Veranschaulichung statistischer Probleme und die Heranziehung von Berechnungen zur Kritik statistischer Ergebnisse, sowie zur Gewinnung weiterer Aufschlüsse aus den elementaren Zählungsergebnissen in den Vordergrund tritt. Bei der Entwicklung ihres Programmes unterscheidet Mayr 5 Kapitel: Die theoretische Veranschaulichung statistischer Probleme durch mathematische Formeln und diesen entsprechende graphische Darstellungen; die Interpolation von Resultaten; die geometrische Repräsentation statistischer Gesetze; die politische Arithmetik; die Auslese von Massenerscheinungen mit Wahrscheinlichkeitscharakter. Tatsächlich dürfte sich auch unter diesem Programm die mathematische Statistik vollständig behandeln lassen. Dem Programme fehlt jedoch die Ver-

knüpfung der Erkenntnisse durch ein gemeinsames (oberstes) Prinzip, und damit geht selbstverständlich der Charakter der Wissenschaft verloren.

4. Zum Verständnis der Auffassung von *Lexis* (Abhandlungen zur Theorie der Bevölkerungsstatistik) müssen einige allgemeinere Bemerkungen vorausgeschickt werden. Die Form jeder Wissenschaft ist nichts anderes als das Verfahren, nach welchem die Materie je nach der Zusammengehörigkeit aneinander gereiht wird. Diese Aneinanderreihung hat zunächst nur logische Bedeutung. Eine der Wissenschaft *adäquate* Anschauungsform besteht dann, wenn den logischen Verknüpfungen auch eine gewisse reale Bedeutung für die Beziehungen der Dinge selbst beigelegt werden kann. Bei den Naturwissenschaften gelingt dies nur insofern, als die komplizierten Erscheinungen in die einfacheren zerlegt werden. Die Einführung des Begriffes der Kraft oder der Ursache leistet für die Aufhellung des Wesens der Erscheinungen nichts; vielmehr sind die fundamentalen Differentialgleichungen der Mechanik die Ausgangsformeln aller Erscheinungen. Ganz anders die Gesellschaftswissenschaften.

Unter den sozialen Erscheinungen gibt es einige von rein naturwissenschaftlichem Charakter, andere, welche vom Menschen als einem nach Motiven handelnden Objekte ausgehen. Die ersteren vermag man wieder nur nach dem Schema der Naturwissenschaften zu behandeln, und die Wissenschaft, welche sich mit ihnen beschäftigt, ist die *Statistik*. Sie hat objektiv und zahlenmäßig das relativ Stetige und Typische im Bestande und den Veränderungen der menschlichen Erscheinungen zu konstatieren.

Die theoretisch vollkommenste Verhältniszahl ist die Wahrscheinlichkeit und so ist auch die höchste wissenschaftliche Form, in welcher die Statistik den Stoff fassen kann, die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Nach Lexis ist die mathematische Statistik: *die Statistik der sozialen Erscheinungen von naturwissenschaftlichem Charakter in ihrer adäquatesten Form.*

Die mathematische Statistik habe keinen Bezug zu den sozialen Wissenschaften der zweiten Art. Die Erkenntnisse dieser können nach einem höheren Schema, dem Kausalitätsgesetze, geordnet werden, weil wir für die Motive der menschlichen Handlungen, den Eigennutz, das Ideal usf. ein unmittelbares Verständnis haben. Ob hier (bei den *generischen* Massenerscheinungen) konstante Verhältnisse oder gar Wahrscheinlichkeiten vorkommen, würde nur insofern von Interesse sein, als damit auch die *Konstanz der Motive* nachgewiesen werden könnte. Etwaige statistische Erhebungen in Ansehung

dieser Wissenschaften haben bloß die Bedeutung der Kontrolle der Spekulation.

Die Lexissche Definition geht rücksichtlich der statistischen Erscheinungen selbstverständlich weit über den Rahmen der der Wissenschaft in diesem Buche gezogenen Grenzen hinaus.

Nicht überflüssig scheint es, einiges über den Namen der Wissenschaft an dieser Stelle anzufügen. Derselbe wird erstmalig in mehreren, fast gleichzeitigen Publikationen verschiedenen Inhalts gebraucht.

Wittstein leitet in seiner Mathematischen Statistik (1868) oder „wie ein Mathematiker vielleicht lieber sagen würde, analytischen Statistik" einige Lehrsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung ab, nach welchen sich aus einem wahrscheinlichen, zusammengesetzten Ereignis auf die zugrunde liegende Wahrscheinlichkeit und den Fehler der Bestimmung, sowie aus den einem solchen Ereignis zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeiten auf die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses und des Fehlers schließen läßt. Die Existenz von Beziehungen zwischen wahrscheinlichen und statistischen Ereignissen wird nicht nachgewiesen.

Zeuner nimmt den Namen „Abhandlungen aus der mathematischen Statistik" (1870) für die Probleme der Abgrenzung und Verwertung der statistischen Gesamtheiten in Anspruch.

In der neuesten Zeit hat *Czuber* in seiner „Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendungen auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung" (1903) den Namen der mathematischen Statistik für das ganze, in diesem Buche behandelte Wissensgebiet verwendet.

Im allgemeinen scheint jedoch der Name aus der Literatur wieder zu verschwinden.

Westergaard hat in seiner *Theorie der Statistik* (1890) eine Lehre der statistischen Maßzahlen (abgesehen von der Lehre der Gesamtheiten und der Darstellung der Maßzahlen) veröffentlicht.

Bortkiewicz hat in den „Kritischen Betrachtungen der theoretischen Statistik" die Behandlungsfähigkeit statistischer Probleme durch die Wahrscheinlichkeitslehre erörtert und die Probleme, welche im vorliegenden Buche als mathematische Statistik bezeichnet werden, in der Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften als „Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Statistik" erscheinen lassen, obgleich die Probleme aus der Theorie der Gesamtheiten mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung nichts zu tun haben.

Einen eigentümlichen Namen hat *Fechner* für die von ihm behandelte Theorie der extensiven statistischen Maßzahlen eingeführt. Er hat dieselbe als Kollektivmaßlehre bezeichnet. Mit dem Titel sollte auf die Anwendbarkeit der behandelten Lehrsätze auf Massenerscheinungen hingewiesen werden, welche ebensowohl den Gesellschaftswissenschaften, als der Anthropologie, der Zoologie, der Botanik, Meteorologie oder Artistik angehören.

In neuester Zeit hat Lexis in seiner Demographie und Demologie (1903) die sämtlichen Probleme der mathematischen Statistik berührt.

Der Name der mathematischen Statistik ist zwar in der Beziehung vielleicht nicht genug prägnant, als derselbe im weitesten Sinne allen Anwendungen der Mathematik im Gebiete der Statistik (also Erörterungen über die Bildung von Verhältniszahlen, über die Proportionslehre und die Gesellschaftsrechnung) beigelegt werden kann. Statt desselben wäre vielleicht besser der Name „die Lehre von den statistischen Maßzahlen“ einzuführen. Für die ältere Bezeichnungsweise spricht der Umstand, daß in den an den Versicherungskursen der Universitäten von Göttingen und Wien seit dem Studienjahre 1895/96 und der technischen Hochschule in Wien seit dem Studienjahre 1894/95 abgehaltenen Vorlesungen über mathematische Statistik das oben definierte Wissensgebiet behandelt wird.

Erster Abschnitt.

Die Lehre von den statistischen Gesamtheiten.

§ 1. Die Merkmale der Gesamtheiten. Wie aus den einleitenden Bemerkungen hervorgeht, erfolgt im Gebiete der Statistik die Einteilung der Mengen von Individuen zu dem Zwecke, um die Eigenschaften oder solche Änderungen derselben zu beobachten, welche unter gleichen Verhältnissen stets wiederkehren, also *typisches* Gepräge haben.

Alle Individuen, an welchen die gleiche Eigenschaft oder Änderung beobachtet werden kann, nennt man eine *Gesamtheit.*

Die Eigenschaften und Änderungen an der Masse werden stets mit gewissen äußeren Merkmalen in Beziehung gesetzt. Die Erfahrung hat beispielsweise gezeigt, daß sich die Sterbens-, Invaliditäts-, Erkrankungs- und Heirats-Wahrscheinlichkeit ändert, wenn sich das Alter, das Geschlecht, die sozialen Verhältnisse ändern. Man kann somit auch die Gesamtheiten als von *Merkmalen* abhängige Größen auffassen.

Statistische Gesamtheiten sind darnach auch die Summen der Individuen gleicher Merkmale.

Aus diesen Darlegungen sind zwei Folgerungen ableitbar:

1. Die Individuen können je nach den zu beobachtenden Eigenschaften und Änderungen in verschiedenster Art zusammengefaßt werden; soll jedoch eine Gesamtheit statistische Bedeutung erlangen, dann muß sie zu einem *erheblichen* Ergebnisse in Beziehung stehen. Was nun als erheblich zu gelten hat, dürfte im allgemeinen schwer festzustellen sein; vom Standpunkte der Gesellschaftswissenschaften sind alle Erscheinungen an der Masse erheblich, welche auf den Bestand, die Änderungen in diesem und die Zusammensetzung der Bevölkerung, deren Vermögens- und Erwerbsverhältnisse Einfluß nehmen.

2. Die Merkmale sind die Elemente der Gesamtheiten. Die Lehre von den Gesamtheiten wird daher zunächst von ihnen ausgehen müssen

und erst nach Charakteristik derselben zur Einteilung und Behandlung der Gesamtheiten gelangen können.

Dies vorausgeschickt, wird zunächst von den Merkmalen folgendes bemerkt. Mit Beziehung auf die Gesamtheiten werden die Merkmale vielfach als *Ursachen* bezeichnet. Selbstverständlich haben dieselben mit denen der Naturwissenschaften nichts gemein; aus einem Ursachenschema der Statistik kann a priori kein Resultat, nicht einmal die Erkenntnis abgeleitet werden, daß dasselbe Ursachenschema immer zum gleichen Resultate führen müße. Ein Ursachenschema, das erfahrungsgemäß diese Bedingung erfüllt, soll als ein *vollständiges* bezeichnet werden.

Zur *Einteilung* der Ursachen ist auszuführen:

Es gibt Ursachen, welche die sämtlichen, in Betracht kommenden Individuen in eine endliche und solche, welche sie in eine unendliche Anzahl von Gruppen teilen. Zu den ersteren gehört das Geschlecht, die Rasse, der Aufenthaltsort; zu den letzteren das Alter, die Geburtszeit, (bei den Sterbenswahrscheinlichkeiten Versicherter) die Versicherungsdauer, (bei den Invaliditätswahrscheinlichkeiten) die Berufsdauer, (bei den Invaliditätssterbenswahrscheinlichkeiten) die Zeit nach Eintritt der Invalidität. Die ersteren sollen als *diskontinuierliche*, die letzteren als *kontinuierliche* Ursachen bezeichnet werden.

Es gibt Ursachen, deren Zugehörigkeit zu einer dieser beiden Gruppen zweifelhaft ist. So scheint es, daß die unendliche Mannigfaltigkeit der sozialen Verhältnisse diese unter die Gruppe der kontinuierlichen Ursachen reiht; wegen der Schwierigkeit der Charakteristik derselben begnügt man sich jedoch bei allen Untersuchungen mit Unterscheidungen nach *wenigen Gruppen* und klassifiziert diese nach den Einkommensverhältnissen, Berufen, Wohnungsverhältnissen usw.

Die Statistik fordert für die Bestimmung der Maßzahlen in der Mehrzahl der Fälle Gesamtheiten von unendlich großer (stetig wachsender) Anzahl der Beobachtungselemente (der Individuen der Gesamtheiten). Die diskontinuierlichen Merkmale bieten kein Hindernis für die Erfüllung dieser Forderung. Dagegen ist die Konstatierung von Gesamtheiten mit einer endlichen oder gar unendlich großen Anzahl von Individuen beim Vorhandensein von einer oder mehreren kontinuierlichen Ursachen unmöglich, weil die Teilung einer noch so großen, jedoch endlichen Anzahl von Individuen nach unendlich differenzierten Merkmalen für jeden einzelnen Wert des Merkmales zu einer (unendlich) kleinen Zahl von Individuen führen muß.

Es gibt zweierlei Mittel, den hiedurch erwachsenden Schwierigkeiten der Beobachtung zu begegnen:

a) Das Maß wird *einschließlich* der Änderung der Qualität infolge der Änderung der kontinuierlich wirkenden Ursache, also an einer gemischten Qualität festgesetzt;

b) man macht von der Erfahrung Gebrauch, daß sich — *abgesehen vom Zeitpunkte des Eingreifens der Ursache* — die Maßzahlen bei kleinen Unterschieden der Merkmale nur wenig ändern und behandelt Individuen mit geringen Unterschieden der Qualität als Individuen gleicher Qualität.

Die Forschungsmethode nimmt selbstverständlich einen wesentlichen Einfluß auf die Qualität der Ergebnisse.

§ 2. Die Maßzahlen für gemischte Qualitäten (die Sterblichkeitsziffer). Maßzahlen, in welchen die Änderung der Qualität infolge Änderung einer kontinuierlich wirkenden Ursache mitbeobachtet wird, sind die sogenannten statistischen „Ziffern" wie die Sterblichkeits-, Invaliditäts-, Heirats-, Geburtenziffer usw. Die für die statistischen Ziffern im allgemeinen geltenden Erwägungen können stets in Analogie mit den Erörterungen über die Sterblichkeitsziffer, deren Konstatierung und Zweck erfolgen. Es soll demnach zunächst von der letzteren die Rede sein.

Die *Sterblichkeitsziffer* gibt die Anzahl der von einer *Einheit von Lebenden* (also von einem, hundert, tausend Lebenden) in der *Zeiteinheit* Sterbenden, wenn die Lebenden ohne Unterschied des Alters in Beobachtung gezogen werden. Bezeichnen somit $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n$ die Lebenden der einzelnen Alter zu Beginn eines Jahres, $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ die daraus im Laufe eines Jahres Sterbenden, dann ist die (auf einen Lebenden bezogene) Sterblichkeitsziffer

$$\mu = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_n}{l_1 + l_2 + l_3 + \cdots + l_n}. \qquad \text{(I)}$$

Trotz der allgemeinen Verwendung dieser Ziffer für die Charakteristik der Bevölkerungsverhältnisse, ist sie von vielen Statistikern als wertlos bezeichnet worden, weil hierauf nicht nur die Sterblichkeit, sondern auch die Altersverteilung der Bevölkerung Einfluß nimmt, durch sie demnach weder die eine noch die andere Ursache charakterisiert wird. Eine in starker Zunahme begriffene Bevölkerung (deren jüngere Altersgruppen entsprechend viele Individuen aufweisen) kann auch bei hoher Sterblichkeit die gleiche Sterblichkeitsziffer wie eine Bevölkerung geringer Sterblichkeit ergeben, sofern nur in der letzteren die

höheren Altersklassen entsprechend besetzt sind. Insbesondere für den Vergleich der Bevölkerung verschiedener *Berufskreise* ist sie untauglich. Harald Westergaard gibt in seiner Lehre von der Mortalität und Morbilität (2. Auflage, Jena 1901) das folgende, aus der engl. offiziellen Statistik gewählte Beispiel (Supplements to the thirty fifth annual Report of the Registrar-General of Births, Deaths and Marriages in England, London 1875).

Es kamen bei

	Geistlichen			Eisenbahnbeamten		
im Alter	auf Lebende	Todesfälle im ganzen	Todesfälle auf 1000 Lebende	auf Lebende	Todesfälle im ganzen	Todesfälle auf 1000 Lebende
25—35	13339	62	5	64445	787	12
35—45	14811	93	6	37875	567	15
45—55	12539	166	13	17849	384	22
55—65	10086	229	23	6406	260	41
65—75	5357	279	52	1678	119	71
darüber	1804	271	150	258	53	205
Summe	57936	1100	19	128511	2170	17

Die (auf 1000 Lebende bezogene) Sterblichkeitsziffer der Geistlichen beträgt sohin 19, die der Eisenbahnbeamten 17. Die sehr bemerkenswerte Tatsache, daß die Sterblichkeitsziffer der Geistlichen größer erscheint, als die der Eisenbahnbeamten, ist unzweifelhaft eine notwendige Folge der stärkeren Besetzung der jüngeren Altersklassen der letzteren. Würde man daher die Altersverteilung bei Eisenbahnbeamten in Analogie der Altersverteilung der Geistlichen wählen, somit die Totenzahlen der Altersgruppe 25—35 als $13339 \cdot 0{,}012 = 160$, die der Altersgruppe 35—45 als $14811 \cdot 0{,}015 = 222$ setzen usf., so erhielte man als Gesamtsumme der Toten 1822 oder als Sterblichkeitsziffer 31. —

Der Statistiker Körösi hat daher behufs Bildung eines für den Vergleich der Sterblichkeit in verschiedenen Ländern brauchbaren Maßstabes die Annahme einer Bevölkerung von bestimmter Altersverteilung (eines Standard) in Vorschlag gebracht.

Seien, wie oben, die beobachteten Lebenden $l_0, l_1, l_2, \ldots, l_n$; die Toten $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$ und $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ der Standard, dann ist offenbar die Sterblichkeitsziffer nach dem Standard

$$\mu = \left[\lambda_0 \frac{t_0}{l_0} + \lambda_1 \frac{t_1}{l_1} + \lambda_2 \frac{t_2}{l_2} + \cdots + \lambda_n \frac{t_n}{l_n}\right] : \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n.$$

Aber auch die Ergebnisse aus der Annahme einer Standardbevölkerung müssen mit großer Vorsicht beurteilt werden.

Es läßt sich nämlich nachweisen, daß je nach dem Standard die Größenverhältnisse unter den Sterblichkeitsziffern wechseln können.

Zu diesem Behufe braucht man nur die Sterblichkeitsziffer für eine Menschenmasse von zwei Altersklassen zu suchen. Sind die Sterbenswahrscheinlichkeiten dieser beiden Altersklassen in einem Lande w_1 und w_2; in einem zweiten Lande w_1' und w_2' und die Standardbevölkerung in einem Falle λ_1 und λ_2; in einem zweiten Falle λ_1' und λ_2', dann erhält man als Sterblichkeitsziffern für den ersten Standard:

$$\mu_1 = \frac{\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad \text{und} \quad \mu_2 = \frac{\lambda_1 w_1' + \lambda_2 w_2'}{\lambda_1 + \lambda_2},$$

sodann für den zweiten Standard

$$\mu_1' = \frac{\lambda_1' w_1 + \lambda_2' w_2}{\lambda_1' + \lambda_2'} \quad \text{und} \quad \mu_2' = \frac{\lambda_1' w_1' + \lambda_2' w_2'}{\lambda_1' + \lambda_2'}.$$

Als Differenz der Sterblichkeitsziffern resultiert für den ersten Standard

$$\mu_1 - \mu_2 = \frac{\lambda_1 (w_1 - w_1') + \lambda_2 (w_2 - w_2')}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\delta_1 + q\delta_2}{1 + q},$$

sofern man für $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = q$, für $w_1 - w_1' = \delta_1$, und für $w_2 - w_2' = \delta_2$ einsetzt. Analog und bei der Annahme, daß $\frac{\lambda_2'}{\lambda_1'} = q'$, erhält man für den zweiten Standard

$$\mu_1' - \mu_2' = \frac{\delta_1 + q'\delta_2}{1 + q'}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt, daß

$$\mu_1 - \mu_2 \gtreqless \mu_1' - \mu_2' \quad \text{wenn} \quad q(\delta_2 - \delta_1) \gtreqless q'(\delta_2 - \delta_1)$$

und hieraus ergeben sich die nachfolgenden Sätze:

1. $\mu_1 - \mu_2$ ist ebenso groß wie $\mu_1' - \mu_2'$ wenn $\delta_2 = \delta_1$. Die Differenzen zwischen den Sterblichkeitsziffern bleiben bei jedem beliebigen Standard konstant, wenn die Unterschiede der Sterbenswahrscheinlichkeiten gleicher Alter für die verschiedenen Länder gleich sind. Soferne jedoch δ_2 von δ_1 sich um ϱ unterscheidet, ist für positive ϱ, d. h. wenn die Sterbenswahrscheinlichkeiten der Tafel der rascher ansteigenden Sterblichkeitsmaße mit w_1, w_2 bezeichnet werden,

2. $\mu_1 - \mu_2 \gtreqless \mu_1' - \mu_2'$ wenn $q \gtreqless q'$. Es sind daher die Größenverhältnisse der Sterblichkeitsziffern ganz von der Besetzung der Alter im Standard abhängig. Beispielsweise kommt der Unterschied der Sterblichkeitsziffern in zwei Bevölkerungen mit der Sterblichkeit von 0,01 in der unteren, mit 0,04 in der oberen Altersklasse der ersten; mit der Sterblichkeit von 0,01 in der unteren, mit 0,02 in der oberen Altersklasse der zweiten Bevölkerung je nach dem Standard, wie folgt, zum Ausdrucke:

Standard	Sterblichkeitsziffer in der Bevölkerung		Unterschied
	1	2	
1000 — 900	0,02421	0,01474	0,00947
1000 — 100	0,01273	0,01091	0,00182
1000 10	0,01030	0,01010	0,00020

Daraus ergibt sich der folgende selbstverständliche Satz: *Je rascher der Standard abfällt, desto schwächer wirkt das Ansteigen der Sterblichkeit in den oberen Altersklassen auf die Sterblichkeitsziffer ein. Für eine konstante Altersbesetzung kommt diese Ziffer dem Mittel aller Wahrscheinlichkeiten* (ohne Rücksicht auf die Gewichte) *gleich.* Diesem Übelstande des Standard sucht man durch *Teilung* der Absterbeordnung in mehrere Gruppen von Altersklassen (beispielsweise in die Altersklassen 0—1, 1—20, 20—40, 40—60, 60 und darüber) zu begegnen, bei denen naturgemäß die Abweichungen im Standard geringer sein müssen, wie immer auch die diesem zugrunde liegende Bevölkerung zusammengesetzt sein mag (Beschlüsse der Berner Session des internationalen statistischen Institutes).

Die Besetzung der einzelnen Alter mit Individuen (die Altersverteilung) hängt außer von der Sterblichkeit noch von der Geburtenfrequenz und den Wanderungen ab. Zu einer von den beiden letzteren Ursachen unabhängigen Altersverteilung gelangt man, wenn man aus den für jedes Alter gefundenen Sterbenswahrscheinlichkeiten eine Absterbeordnung (die Sterblichkeitstafel einer stationären Bevölkerung) herstellt. Die hieraus ermittelte Sterblichkeitsziffer ist lediglich ein Maß für die Sterblichkeit und, wie man leicht erkennt, der reziproke Wert der mittleren Lebensdauer.[1])

Diese letztere findet sich tatsächlich bei allen Sterbetafeln angegeben. Gemäß den Beobachtungen über englische Versicherte für einfache Kapitalversicherungen auf den Todesfall mit Gewinn,

1) Bezeichnet man die Sterbenswahrscheinlichkeiten der aufeinander folgenden Alter mit w_0, w_1, w_2, . . ., w_n; die Lebenden des Alters 0 mit L_0, die Lebenden des Alters k mit $L_k = L_0 (1 - w_0)(1 - w_1) \cdots (1 - w_{k-1})$, so wäre die Sterblichkeitsziffer

$$\mu = (L_0 w_0 + L_1 w_1 + L_2 w_2 + \cdots + L_n w_n) : (L_0 + L_1 + L_2 + \cdots + L_n),$$

oder nachdem die Gesamtsumme der vom jüngsten bis ins höchste Alter Sterbenden L_0 ist

$$\mu = L_0 : (L_0 + L_1 + L_2 + \cdots L_n),$$

während sich die mittlere Lebensdauer mit

$$(L_0 + L_1 + L_2 + \cdots + L_n) : L_0$$

beziffert.

Aggregattafeln für Männer (1863—1893), ergaben sich vom Alter 0 aufwärts 7 056 863 Lebende und 140 889 Todesfälle, sohin für ein Individuum eine Sterblichkeitsziffer von 0,020. Der reziproke Wert der mittleren Lebensdauer von 50,65 ist gleichfalls 0,020.

§ 3. Die Änderungen der Maßzahlen für kleine Unterschiede des Merkmales. Es gilt in der Statistik als ein allgemeiner Erfahrungssatz, daß sich die sämtlichen statistischen Maßzahlen mit geringen Änderungen der Ursachen, abgesehen vom Zeitpunkte des Eingreifens derselben, selbst nur wenig ändern. Insbesondere bedient man sich bei allen statistischen Schlüssen der folgenden Sätze:

a) die Änderungen der Sterbenswahrscheinlichkeiten sind innerhalb geringer Änderungen der Beobachtungszeit nur gering, doch ist bisher eine stete Abnahme der Sterblichkeit zu verzeichnen.

Beispielsweise betrug die Sterbenswahrscheinlichkeit pro 1000 Beobachtungen in Schweden (nach Harald Westergaard, Lehre von der Mortalität und Morbilität, wie oben):

im Alter	für Männer in den Jahren					
	1816—40	1841—50	1851—60	1861—70	1871—80	1881—90
0	179,7	165,3	157,4	149,3	140,6	120
1	47,9	38,6	45,8	49,0	40,7	35,9
5	10,9	11,3	15,6	13,5	12,2	10,8
10	5,1	4,7	6,4	5,3	5,2	4,7
40	15,1	14,2	13,7	11,5	10,2	8,8
70	80,4	77,8	72,8	70,7	61,4	52,6
85	269,0	299,8	232,4	243,5	222,3	209,2

im Alter	für Frauen in den Jahren					
	1816—40	1841—50	1851—60	1861—70	1871—80	1881—90
0	154,9	140,6	134,4	128,2	119,3	100,5
1	43,2	35,9	42,4	45,9	38,3	33,6
5	10,5	9,9	15,—	12,8	11,7	10,6
10	5,2	4,7	5,8	5,1	4,9	4,6
40	11,9	10,7	10,5	9,8	8,9	8,1
70	70,7	67,6	65,3	60,4	51,7	46,5
85	239,7	241,5	212,5	211,6	191,7	181,7

Die Wahrnehmungen für Schweden werden durch analoge Wahrnehmungen für andere Länder bestätigt. Er starben von 1000 Personen jährlich:

Land	innerhalb der Periode 1871—80				innerhalb der Periode 1881—90			
	im Alter							
	5—10	20—25	40—45	70—75	5—10	20—25	40—45	70—75
Italien	124	95	129	831	108	83	109	825
Frankreich	67	84	113	768	62	75	120	766
Schweiz	63	80	130	984	54	70	127	921
Belgien	75	80	114	837	52	70	114	738
Holland	79	85	118	797	64	65	109	694
Preußen	95	76	139	882	88	65	127	853
Schottland	86	88	129	706	65	74	122	672
Schweden	85	62	98	659	77	59	88	587
Norwegen	65	74	96	562	78	77	86	466
Dänemark	83	70	104	733	72	65	94	619
Finland	93	70	103	850	98	70	107	784

Es betrug die Sterblichkeit unter den Versicherten von Gotha (Die Reform des Rechnungswesens der Gothaer Lebensversicherungsbank a./G. 1903) vom 6. und höheren Versicherungsjahren an Männern mit Versicherung auf Lebenszeit in den nachstehenden Zeitperioden und dem Zugange aus derselben Versicherungsperiode (III. Teil p. 126, 127):

Alter	1829—1852	1852—1867	1867—1881	1881—1896
31—35	0,96	0,58	0,53	0,51
36—40	1,04	1,07	0,76	0,65
41—45	1,17	1,08	0,96	0,84
46—50	1,51	1,25	1,24	1,25
51—55	1,89	1,72	1,86	1,81
56—60	2,87	2,63	2,61	2,34
61—65	4,36	4,32	3,30	3,67
66—70	6,41	4,70	5,01	4,61
71—75	9,49	5,26	11,92	10,36

b) Die Änderungen der Dienstunfähigkeitsziffern sind innerhalb geringer Änderungen der Beobachtungszeit nur gering, doch ist bisher eine stete Zunahme zu verzeichnen. Es beträgt die Zahl der Invaliditätsfälle für 1000 Beobachtungen während der Beobachtungsjahre

für die Altersklasse	1877—1885	1885—1889	1877—1885	1885—1889
	bei dem Nichtfahrpersonal des Vereines deutscher Eisenbahnverwaltungen		bei dem Fahrpersonal	
46—50	11,4	12,6	15,6	19,6
51—55	22,0	24,9	32,7	36,7
56—60	41,5	52,8	57,0	68,2
61—65	86,3	106,9	111,3	161,4
66—70	146,7	169,8	149,5	231,9
71—75	227,4	239,8	221,8	331,1
76—80	248,7	271,6	306,7	1000,—

für *österreichische Bergarbeiter* (Beiblatt zu den amtlichen Nachrichten des Ministeriums des Innern betreffend die Unfall- und Krankenversicherung):

Alter	in der Beobachtungsperiode		
	1886—1889	1890—1893	1894—1897
30	1,9	2,6	2,1
35	4,0	3,0	8,4
40	7,9	8,1	12,0
45	16,3	18,5	26,1
50	28,2	45,6	62,—
55	62,3	81,4	92,7
60	117,—	144,—	129,—

c) Die Änderungen der Sterbenswahrscheinlichkeiten sind (mit Ausnahme der Änderungen in den Altern Null und Eins) für geringe Altersunterschiede nur gering. Es sterben von 1000 männlichen Personen innerhalb eines Jahres

im Alter	nach den Beobachtungen der Gothaer Lebensversicherungsbank	nach der Sterbetafel der 4 franz. Gesellschaften	nach der deutschen Rentnertafel	nach der Sterbetafel für Sachsen 1880/85/90
30	4,49	6,77	5,70	7,95
31	4,65	6,99	5,40	8,39
50	14,36	16,32	15,60	19,48
51	15,49	17,35	16,60	22,94
70	70,88	69,54	63,80	76,30
71	76,75	75,70	69,80	96,09
90	346,74	280,92	337,50	
91	375,66	300,95	381,30	

Wegen der bedeutenden Variation der Sterblichkeit im Jahre der Geburt pflegt man hierfür die Beobachtungen monatweise anzustellen. Nach den Berechnungen Harald Westergaards über die Sterblichkeit in Berlin sterben von 100000 Kindern des betreffenden Lebensalters täglich (ausgeglichene Zahlenreihe):

im 1. Lebensmonat	221	im 7. Lebensmonat	55
„ 2. „	99	„ 8. „	50
„ 3. „	86	„ 9. „	45
„ 4. „	76	„ 10. „	41
„ 5. „	68	„ 11. „	37
„ 6. „	61	„ 12. „	34

d) Die Änderungen der Sterbenswahrscheinlichkeiten Versicherter sind (mit Ausnahme der Änderungen im 1.—5. Versicherungsjahr) für geringe Versicherungsdauern nur gering. Es betrug die 1000fache

Sterbenswahrscheinlichkeit Versicherter (Einfache Kapitalversicherung auf den Ablebensfall mit Anteilnahme am Gewinn für Männer nach den Untersuchungen von englischen Gesellschaften 1863—1893)

im Alter	im Jahre nach Abschluß der Versicherung							
	0—1	1—2	2—3	3—4	4—5	5—6	6—7	5 u. darüber
35—40	3,61	5,81	6,42	7,06	7,34	8,52	8,59	8,54
50—54	8,88	12,87	12,93	15,09	14,39	15,96	14,12	17,40
65—69	21,43	37,50	30,75	30,35	45,63	48,74	39,13	49,20

Aus dem Materiale der Tafel der 20 englischen Gesellschaften leitet man als Sterblichkeitsprozentsätze der nachfolgenden, in Jahren ausgedrückten Vertragsperioden ab:

im Alter	0—1	1—4	5—9	10 und aufwärts	der Prozentsatz der Vertragsperiode von „10 und aufwärts" ist im Prozentsatz jener von „5—9" enthalten
35—39	0,43	0,83	1,06	1,17	1,10 mal
50—54	0,65	1,28	1,75	1,90	1,09 „
65—69	1,42	3,63	4,83	5,11	1,06 „

In der Tafel des österreichischen Beamtenvereins wurden als Sterbenswahrscheinlichkeiten beobachtet in Prozenten der mittleren Sterbenswahrscheinlichkeit

nach einer Vertragsdauer von Jahren	in der Altersklasse			ohne Unterschied des Beitrittsalters
	35—45	45—55	55—65	
0	51,18	53,29	58,26	50,68
$^1/_4$	58,10	70,57	58,27	60,39
$^2/_4$	61,61	76,52	62,64	66,83
$^3/_4$	67,23	79,87	68,96	72,68
1	70,25	84,34	68,48	77,94
$1^1/_2$	83,—	80,—	71,50	86,70
2	90,23	85,19	77,08	93,09

e) Inwieweit der Hauptsatz von der Geringfügigkeit der Änderungen bei geringer Variation der Ursache eine Einschränkung mit Beziehung auf die Sterbenswahrscheinlichkeiten der Invaliden erfährt, kann bisher noch nicht genau bestimmt werden. Nach den Beobachtungen des deutschen Reichsversicherungsamtes über die Invalidenrentenempfänger an den deutschen Versicherungsanstalten betrug die Wahrscheinlichkeit, im Laufe der einzelnen Rentenbezugsjahre aus dem Rentengenusse zu scheiden (amtliche Nachrichten des Reichsversicherungsamtes 1901)

im Alter	nach Rentenbezugsjahren						
	1	2	4	6	8	10	für Gesunde
40	0,3220	0,1900	0,0900	0,0535	0,0310	0,0224	0,0215
50	0,2320	0,1375	0,0800	0,0601	0,0460	0,0377	0,0382
60	0,1515	0,0970	0,0795	0,0740	0,0730	0,0770	0,0811
70	0,1255	0,1125	0,1155	0,1200	0,1410	0,1623	0,1745
80	0,1800	0,1890	0,2147	0,2436	0,2734	0,3037	0,3190
90	0,3190	0,3346	0,3669	0,4000	0,4426	0,4910	0,5193

§ 4. Die Konstanz der statistischen Maßzahlen. Die Tatsache, daß sich gewisse statistische Maßzahlen mit der Beobachtungszeit im allgemeinen nur wenig ändern, wurde seit jeher der eingehendsten Erwägung unterzogen. Eine Erklärung kann man in folgender Art versuchen.

Die körperliche Entwicklung der Individuen derselben Nationalität und desselben Geschlechtes erfolgt im allgemeinen in ziemlich unveränderlichen Altersabschnitten. Die Individuen gelangen fast im selben Alter in den Besitz des Sprechvermögens, wechseln nahezu um das gleiche Alter die Zähne, mutieren fast während der selben Altersperioden die Stimme und treten fast gleichaltrig in die Periode der Zeugungsfähigkeit, den Stillstand des Wachstums und der körperlichen Entwicklung ein. Wenn auch das Sterben über alle Alter ausgebreitet ist, so liegt das Maximum der Anzahl der Todesfälle der Absterbeordnung einer Menschenrasse doch fast immer im selben Alter. Zu diesem sohin für jedes Individuum unabänderlichen Bedingungskomplex der Lebensverhältnisse — sozusagen der Rassenkonstitution — als dem äußeren Rahmen tritt eine Reihe von anderweitigen Ursachen der Maßzahlen, welche von Individuum zu Individuum wechseln und sich vollständig gleichmäßig niemals wiederholen, nämlich die Familienkonstitution (das Erbe in körperlicher Beziehung) und die sozialen Verhältnisse.

Die unendliche Verschiedenheit dieser letzteren Ursachen interessiert aber zumindest nach ihrer Zusammensetzung in bezug auf die Maßzahlen nicht. Für diese ist lediglich die Zerfällung der Mannigfaltigkeiten in jene wenigen Kombinationen, in welchen das *Endresultat* beobachtet wird, von Belang. Bei der Beobachtung der Sterblichkeitsmaße interessiert beispielsweise lediglich das Verhältnis der Anzahl der Fälle, in welchen die Verbindung der verschiedenen Formen von Familienkonstitution und sozialen Verhältnissen einerseits zur Verlängerung des Lebens über die normale Grenze, andererseits zum vorzeitigen Tode führt.

Die relative Konstanz der statistischen Maßzahlen erweist nun zunächst, daß der variable Bedingungskomplex sich insofern wenig

ändert, als durch ihn die Größe der Maßzahl beeinflußt wird. Und dies letztere erscheint wieder selbstverständlich.

Die auffallenden Änderungen der sozialen Verhältnisse treffen nämlich mit Ausnahme weniger Berufskreise doch nur immer die Einwohner großer Städte, sohin eine relativ kleine Zahl der Individuen der allgemeinen Bevölkerung, und auf diese wirken sie nicht immer, nicht einmal vorwiegend derart ein, daß die Änderung der Maßzahl im selben Sinne erfolgt. So wird die Sterblichkeit im allgemeinen durch den steigenden Wohlstand und die Besserung der sanitären Verhältnisse vermindert; doch fordert umgekehrt die Tatsache der Änderung dieser Verhältnisse selbst, sowie der Luxus nicht wenige Opfer. Als retardierendes Moment aller Änderungen erhält sich aber vor allem die Familienkonstitution, deren Änderung der einseitigen Einwirkung einer Ursache durch Generationen bedarf.

Auf solche Weise läßt sich nun auch umgekehrt der Umstand, daß die Stetigkeit des variablen Bedingungskomplexes naturgemäß ist, als Erklärungsgrund für die relative Konstanz der Maßzahlen ansehen.

Ganz ähnlich, wie die Unabhängigkeit von der Beobachtungszeit, kann man die langsame Änderung der Maßzahlen bei Änderung der anderweitigen Ursachen erklären.

Aus den bisherigen Erörterungen läßt sich auch die *Unstetigkeit der Erscheinungen* beim *Eingreifen* einer Ursache deuten: das Eingreifen wirkt nämlich rücksichtlich der übrigen Ursachen als Störung.

§ 5. Die Einteilung der Gesamtheiten. Die Methoden der Feststellung der Gesamtheiten werden durch die diskontinuierlichen Ursachen nicht berührt; dagegen richten sie sich nach der Anzahl und Art der *kontinuierlichen*, von einander *unabhängigen* Ursachen. Die *Zahl* der kontinuierlichen Ursachen soll als *Mächtigkeit* der Gesamtheit bezeichnet werden. *Einmächtig* ist demnach eine Gesamtheit, welche von einer, *zweimächtig* eine Gesamtheit, welche von zwei, allgemein *n-mächtig* eine Gesamtheit, welche von n kontinuierlichen Ursachen abhängig ist.

Beispielsweise sind zweimächtig die Sterbenswahrscheinlichkeiten der allgemeinen Bevölkerung, denn sie hängen vom Alter x und der Beobachtungszeit τ ab. Zwar wird diese Wahrscheinlichkeit oftmals auch als Funktion der Geburtszeit t aufgefaßt, aber die Geburtszeit ist selbst nicht unabhängig. Es besteht nämlich die Beziehung

$$\tau = t + x.$$

Dreimächtig sind die Sterbenswahrscheinlichkeiten der Versicherungsgesellschaften, denn sie werden außer von den Ursachen der Sterbenswahrscheinlichkeit der allgemeinen Bevölkerung noch durch die Versicherungsdauer bestimmt.

Neben den eben charakterisierten Gesamtheiten gibt es solche, welche von keiner kontinuierlichen Ursache abhängig, also von der Mächtigkeit Null sind. Nachdem dieselben in den ferneren Erörterungen der Abschnitte I und II nicht mehr behandelt werden, sollen hierüber an dieser Stelle einige Bemerkungen Platz finden.

Zu den nullmächtigen Gesamtheiten gehören vor allem jene, welche zu den Geschlechtsverhältnissen der Geborenen und Gestorbenen sowie der Bevölkerung führen. Die Unabhängigkeit dieser Zahlen von der Beobachtungszeit ist seit langer Zeit Gegenstand der Forschung. So war das Verhältnis der Knabengeburten zu den Geburten beider Geschlechter in Österreich

im Jahre	bei			
	lebenden ehelichen	lebenden unehelichen	toten ehelichen	toten unehelichen
1870	0,5151	0,5135	0,5720	0,5436
1880	0,5148	0,5137	0,5758	0,5256
1890	0,5150	0,5134	0,5757	0,5525
1900	0,5148	0,5141	0,5721	0,5518

Das Verhältnis der weiblichen zu den männlichen Sterbeziffern betrug für England und Wales

in der Altersklasse	während der Perioden		in der Altersklasse	während der Perioden	
	1841—1850	1881—1890		1841—1850	1881—1890
0—4	0,858	0,843	25—34	1,061	0,950
5—9	0,971	0,983	35—44	1,005	0,854
10—14	1,059	1,051	45—54	0,875	0,775
15—19	1,118	1,003	55—64	0,894	0,819
20—24	0,956	0,965	65—75	0,903	0,856

Im Deutschen Reiche kamen auf 1000 Männer

im Jahre	1871	1037 Frauen	im Jahre	1885	1043 Frauen
	1875	1036 „		1890	1040 „
	1880	1039 „		1895	1037 „

Zu einer weitergehenden Einteilung der Gesamtheiten wird man durch die *Art* der eingreifenden kontinuierlichen Ursachen und zwar insbesondere des Alters und der Beobachtungszeit geführt. Im folgenden werden Erscheinungen, welche vom *Alter* abhängen, sohin als Äußerungen des Lebensprozesses zu gelten haben, *biologische*, die vom Alter unabhängigen Erscheinungen *somatologische* genannt. Rücksichtlich der Abhängigkeit von der Beobachtungszeit werden die Erschei-

nungen in *typische* und *symptomatische* eingeteilt. In den ersteren ist der Einfluß der Beobachtungszeit unmerklich, in den letzteren auch bei zeitlich engbegrenzten Perioden nachweisbar. Die symptomatischen Erscheinungen sind wieder *evolutorisch* oder *oszillatorisch*, je nachdem die Änderungen bei wachsender Beobachtungszeit immer im selben Sinne zu- oder abnehmen, oder die Änderungen ohne durchschlagende Tendenz erfolgen. Die oszillatorischen Erscheinungen werden zu *periodischen* Erscheinungen, wenn sich die Änderungen mit gewisser Regelmäßigkeit vollziehen.

Auf solche Weise unterscheidet man ein-, zwei- oder mehrmächtige Gesamtheiten einer typischen, evolutorischen oder speziell oszillatorischen oder periodischen Erscheinung.

§ 6. Die einmächtigen Gesamtheiten. Einmächtige Gesamtheiten finden sich vornehmlich bei den somatologischen Erscheinungen. So wird man zur Bestimmung der Regelmäßigkeiten in der Körperlänge, dem Brustumfange, dem Körpergewichte von Personen eines bestimmten Alters die Gesamtheiten nur in ihrer Abhängigkeit von der Beobachtungszeit festzuhalten haben. Bei den biologischen Erscheinungen kommen die einmächtigen Gesamtheiten selten vor, weil sie definitionsgemäß vom Alter, in der Regel aber auch von der zweiten Ursache, der Beobachtungszeit, abhängen.

Trotzdem werden auch die letzteren Erscheinungen sehr häufig als solche und zwar immer dann dargestellt, wenn der Einfluß aller *kontinuierlichen Ursachen* bis auf den *einer* Ursache überhaupt vernachlässigt wird. Die Absterbeordnungen werden sogar in der Regel als vom Alter allein abhängige Skalen konstruiert. In solchem Falle wird rücksichtlich der Beobachtungen an der allgemeinen Bevölkerung von dem Einfluße der Beobachtungszeit, rücksichtlich der Beobachtungen an versicherten Leben von dem Einfluße der Selektion und Beobachtungszeit abgesehen.

Rücksichtlich der einmächtigen Gesamtheiten ergeben sich zwei wichtige Probleme, ein mathematisches und ein statistisches.

Im ersteren ist man bestrebt, eine durch mehrere Einheiten der Ursache begrenzte Gesamtheit durch die in den einzelnen Einheiten definierten Gesamtheiten auszudrücken. Im statistischen Probleme sucht man für solche Fälle, in welchen jedes Individuum alle Werte einer Ursache von einem untersten Werte durchlaufen muß, die Individuen einer durch die *Streckeneinheit* der Ursache definierten Gesamtheit, durch die Zahl der Individuen der in die Beobachtung eintretenden

Gesamtheit und die von da ab sich vollziehenden Änderungen, die Zugänge und Abgänge der Individuen — die Ein- und Austretenden — zu bestimmen.

Das erstere Problem wird durch die Interpolationsrechnung gelöst. Bezeichnet man nämlich die Gesamtheit zwischen den Werten der unabhängig Veränderlichen x und $x + t$ mit $u_{x+t} - u_x$ und die Gesamtheiten zwischen den Werten der unabhängig Veränderlichen x und $x + 1$, $x + 1$ und $x + 2$, $x + 2$ und $x + 3$ usf. mit Δu_x, Δu_{x+1}, Δu_{x+2} usf., so besteht nach den Grundsätzen der Differenzenrechnung der Satz

$$u_{x+t} - u_x = \frac{t}{1} \Delta u_x + \frac{t(t-1)}{1 \cdot 2} (\Delta u_{x+1} - \Delta u_x) + \frac{t(t-1)(t-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (\Delta u_{x+2} - 2 \Delta u_{x+1} + \Delta u_x) + \cdots$$

oder

$$= \frac{t}{1} \Delta u_x + \frac{t(t-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 u_x + \frac{t(t-1)(t-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta^3 u_x + \cdots \quad \text{(II)},$$

wenn man zur Abkürzung

$$\Delta^2 u_x = \Delta u_{x+1} - \Delta u_x;$$
$$\Delta^3 u_x = \Delta u_{x+2} - 2 \Delta u_{x+1} + \Delta u_x$$

setzt.

Der Lehrsatz wird zunächst für ganzzahlige t abgeleitet, aber auch für die Bestimmung der Gesamtheiten mit echt oder unecht gebrochenen t und der unendlich kleinen Gesamtheiten zwischen den Werten x und $x + dx$ der unabhängig Veränderlichen unter bestimmten für die statistischen Erscheinungen im allgemeinen zutreffenden Voraussetzungen über die Natur der Funktion u_x verwendet; für ein unendlich kleines t verwandelt sich die obige Gleichung in

$$\frac{du_x}{dx} = \Delta u_x - \frac{1}{2} \Delta^2 u_x + \frac{1}{3} \Delta^3 u_x - \cdots = \log (1 + \Delta) u_x, \quad \text{(IIa)},$$

wobei nur zu beachten ist, daß die sich bei der Reihenentwicklung des Logarithmus ergebenden Exponenten als Iterationszeichen zu gebrauchen sind.

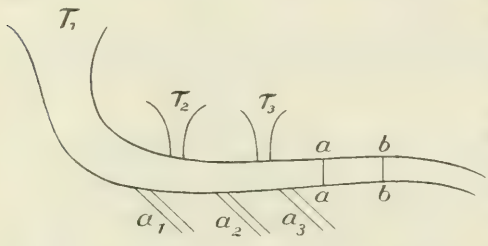
Das *statistische Problem* wird durch den selbstverständlichen Satz gelöst, daß die Zahl der Individuen einer Gesamtheit zwischen irgend zwei Werten der Ursache der Zahl der Individuen gleichkommen muß, welche zwischen dem untersten Werte der Ursache und der oberen Grenze der Gesamtheit in die Beobachtung eintreten, abzüglich jener Individuen, welche zwischen dem untersten Werte und der unteren Grenze der Ursache aus der Beobachtung austreten und zwischen dem untersten Werte der Ursache und der unteren Grenze der Gesamtheit zur Zeit der Beobachtung vorhanden sind.

Dieser Satz findet eine außerordentlich häufige Anwendung *bei der Bildung von Gesamtheiten versicherter Leben, wenn das Eintrittsalter jedes Individuums in die Gesellschaft, sein Eintritts- und Austrittsdatum gegeben ist.* Nach ihm ist die Gesamtheit von Lebenden zwischen den Beobachtungsaltern x und $x + 1$ gleich der Gesamtsumme der vor dem Beobachtungstermin zwischen dem niedrigsten Beobachtungsalter n und der oberen Grenze $\overline{x + 1}$ in die Beobachtung eingetretenen, vermindert um die Zahl der vor dem Beobachtungstermin zwischen den Altern n und x ausgetretenen und am Beobachtungstermin zwischen denselben Altern vorhandenen Personen.[1]) Das Eintreten in die Beobachtung kann nun in zweifacher Art erfolgen und zwar a) durch Vorhandensein zu Beginn der Beobachtung und b) durch den Hinzutritt im Laufe der Zeit bis zum Beobachtungstermin; der Austritt aus der Beobachtung a) durch Austritt bis zum Zeitpunkt der Beobachtung, b) durch Todesfall bis zum gleichen Termin.

Bezeichnet man also in einer geschlossenen Gesellschaft die im Alter i zu Beginn der Beobachtung t_1 vorhandenen Personen mit $V_i^{t_1}$; die zwischen diesem Beginne und dem Zähltermine t_2 hinzutretenden Personen des gleichen Alters mit $E_i^{t_1\ t_2}$; die im gleichen Zeitraume und gleichen Alter austretenden oder sterbenden Personen mit $A_i^{t_1\ t_2}$ bezw. $M_i^{t_1\ t_2}$, endlich die im gleichen Alter am Zähltermine vorhandenen Personen mit $V_i^{t_2}$, und führt ferner die Bezeichnungen ein:

---

1) Man kann sich von der Richtigkeit dieses grundlegenden Satzes der mathematischen Statistik an der Hand eines sehr einfachen Bildes überzeugen. Will man beispielsweise wissen (siehe nebenstehende Figur), welches Quantum Wasser durch irgend einen Teil $a a b b$ einer Röhre zu irgend einer Zeit geflossen ist, wenn die Röhre verschiedene Öffnungen zum Einfüllen T_1, T_2, T_3 (Trichter) und verschiedene Öffnungen zum Auslaufen a_1, a_2, a_3 besitzt, so hat man von der Menge des durch irgend welchen vor dem oberen Querschnitt $b b$ dieses Teiles liegenden Trichters eingefüllten Wassers nur die Menge der durch irgend welche vor dem unteren Querschnitt $a a$ liegende Ausläufe ausgegangenen Wassers und die Menge der in der Röhre vor demselben Querschnitte verbliebenen Wassers abzuziehen. In diesem Bilde werden also die Flüssigkeitsmassen mit den Menschenmassen, die in den Zuflußröhren eintretenden mit den in die Beobachtung eintretenden, die aus den Abflußröhren austretenden Flüssigkeitsmassen mit den aus der Beobachtung austretenden Menschenmassen verglichen.



$$V^{t_1}_{n,\,x+1} = V^{t_1}_{n} + V^{t_1}_{n+1} + \cdots + V^{t_1}_{x}$$
$$E^{t_1/t_2}_{n/x+1} = E^{t_1/t_2}_{n} + E^{t_1,\,t_2}_{n+1} + \cdots + E^{t_1,\,t_2}_{x}$$
$$A^{t_1,\,t_2}_{n,\,x} = A^{t_1/t_2}_{n} + A^{t_1/t_2}_{n+1} + \cdots + A^{t_1/t_2}_{x-1}$$
$$M^{t_1/t_2}_{n,\,x} = M^{t_1,\,t_2}_{n} + M^{t_1/t_2}_{n+1} + \cdots + M^{t_1/t_2}_{x-1}$$
$$V^{t_2}_{n,\,x} = V^{t_2}_{n} + V^{t_2}_{n+1} + \cdots + V^{t_2}_{x-1},$$

so besteht

$$V^{t_1,\,t_2}_{x} = V^{t_1}_{n,\,x+1} + E^{t_1,\,t_2}_{n/x+1} - \left(A^{t_1,\,t_2}_{n,\,x} + M^{t_1,\,t_2}_{n,\,x} + V^{t_2}_{n,\,x}\right). \qquad \text{(III)}$$

Die Formel wurde zuerst von Alexander Finlaison aufgestellt.

Auf ihr beruht das nachfolgende Schema zur Aufbereitung des Beobachtungsmateriales behufs Feststellung von Gesamtheiten:

Formular I.

Alter	Minuend der Formel: Vorhanden zu Beginn	Eingetreten im Laufe	+	Summe von oben	Subtrahend der Formel: Ausgetreten im Laufe	Gestorben im Laufe	Vorhanden am Zahltermine		Summe von oben	Rest der Kolonnen 5 und 10
i	$V^{t_1}_{i}$	$E^{t_1,\,t_2}_{i}$	$V^{t_1}_{i} + E^{t_1/t_2}_{i}$		$A^{t_1,\,t_2}_{i}$	$M^{t_1,\,t_2}_{i}$	$V^{t_2}_{i}$	$A^{t_1,\,t_2}_{i} + M^{t_1/t_2}_{i} + V^{t_2}_{i} = \sigma_i$		$\delta_i = s_i - \sigma_{i-1}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
n	$V^{t_1}_{n}$	$E^{t_1,\,t_2}_{n}$	s_n	s_n	$A^{t_1,\,t_2}_{n}$	$M^{t_1,\,t_2}_{n}$	$V^{t_2}_{n}$	σ_n	σ_n	δ_n
$n+1$	$V^{t_1}_{n+1}$	$E^{t_1,\,t_2}_{n+1}$	s_{n+1}	$s_n + s_{n+1}$	$A^{t_1,\,t_2}_{n+1}$	$M^{t_1,\,t_2}_{n+1}$	$V^{t_2}_{n+1}$	σ_{n+1}	$\sigma_n + \sigma_{n+1}$	δ_{n+1}
$n+2$	$V^{t_2}_{n+2}$	$E^{t_1,\,t_2}_{n+2}$	s_{n+2}	$s_n + s_{n+1} + s_{n+2}$	$A^{t_1,\,t_2}_{n+2}$	$M^{t_1,\,t_2}_{n+2}$	$V^{t_2}_{n+2}$	σ_{n+2}	$\sigma_n + \sigma_{n+1} + \sigma_{n+2}$	δ_{n+2}
⋮										

Es kommt häufig vor, daß ein Individuum zur Bildung vieler, von den aufeinander folgenden Werten der unabhängig Veränderlichen abhängigen Gesamtheiten herangezogen werden muß. So kommt jedes versicherte Individuum bei Konstruktion einer Sterblichkeitstafel versicherter Leben in so vielen Altersgesamtheiten vor, als es verschiedene Alter in der Versicherungsgesellschaft verlebt hat. Beim Gebrauche obigen Schemas erspart man sich, das versicherte Individuum für jede Gesamtheit besonders zu zählen; vielmehr genügt es, jedes Individuum ein einziges Mal nach seinen wesentlichen Merkmalen: Eintrittsalter in die Beobachtung, Eintrittsdatum und Austrittsalter eventuell Austrittsdatum aus der Beobachtung festzuhalten.

Die Resultate der Kolonne 11 sind bereits die Endwerte der Formel III.

Man nennt die in Kolonnen 5 und 10 angedeuteten Operationen das Aufsummieren.

Die Sterbenswahrscheinlichkeiten sind die Quotienten der Zahlen in Kolonne 7 und 11. So ist die Sterbenswahrscheinlichkeit des $n + k$jährigen

$$\alpha_{n+k} = \frac{M'_{n+k}}{\delta_{n+k}}.$$

§ 7. Die zweimächtigen Gesamtheiten (Vorbemerkungen). Die zweimächtigen Gesamtheiten werden zunächst nach Gattungen in *eindimensionale oder Liniengesamtheiten* und in *zweidimensionale oder Flächengesamtheiten* unterschieden. Bei den ersteren sind die Werte der einen Ursache für alle Individuen gleich und die Individuen nur nach der anderen Ursache verschieden; bei den letzteren gehört jedes Individuum zu einer anderen *Werteverbindung* der kontinuierlichen Ursachen. Nach den Voraussetzungen kann es weder bei den Linien- noch bei den Flächengesamtheiten in dem Sinne zu strengen Gesamtheiten kommen, daß die zugehörigen *Maßzahlen* für alle Individuen der Gesamtheit die gleichen bleiben. Bei den ersteren muß angenommen werden, daß sich die zu bildende Maßzahl nicht ändert, falls eine und zwar die für alle Individuen verschiedene Ursache sich innerhalb gewisser enger Grenzen nicht ändert; bei den letzteren, daß die Maßzahl bei Änderung beider Ursachen in engen Grenzen unveränderlich ist. Die Liniengesamtheiten werden demnach durch die für alle Individuen gleiche Ursache „den Träger" und die Grenzen nach der anderen Ursache, die Flächengesamtheiten durch die Grenzen nach beiden Ursachen bestimmt. Für welches Spatium die Annahme der Unveränderlichkeit der Maßzahl berechtigt ist, wird nach der Erfahrung zu beurteilen sein (§ 3).

Für jede der beiden Gattungen von Gesamtheiten sind die folgenden Aufgaben zu lösen: 1. Welche Arten gibt es von jeder Gesamtheit derselben Gattung; 2. welches sind die Beziehungen zwischen den verschiedenen Arten derselben Gattung und den beiden Gattungen der Gesamtheiten, soferne sie zur Ermittlung derselben Maßzahl dienen; 3. wie kann man die Gesamtheiten zur Gewinnung der statistischen Maßzahlen benützen; 4. wie viele und welche statistische Maßzahlen können zur Charakteristik derselben Erscheinung dienen?

Alle diese Fragen werden zweckmäßig an einem konkreten Fall, *den Sterbenswahrscheinlichkeiten der Bevölkerungsstatistik*, beantwortet. Die beiden sie bestimmenden kontinuierlichen Ursachen sind das Alter n

und die Geburtszeit t oder statt deren irgend zwei andere Ursachen, welche sich als Funktionen der genannten Veränderlichen $u = f_1(n, t)$; $v = f_2(n, t)$ darstellen.

Zum Zwecke der leichteren Übersicht über die verschiedenen Gesamtheiten bedient man sich der geometrischen Repräsentation. Dieselbe kann in verschiedener Art erfolgen. Nachstehend wird zunächst die Darstellung von Becker erörtert (Fig. 1).

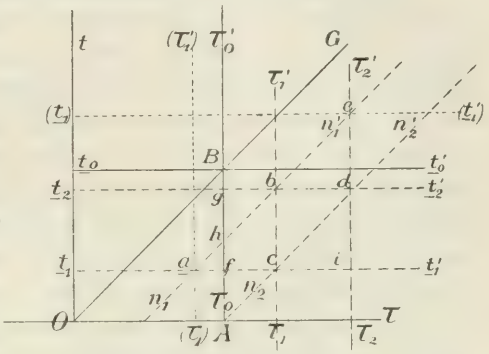


Fig. 1.

In einem rechtwinkligen ebenen Koordinatensystem werden auf der Abszissenachse die Beobachtungszeiten τ, auf der Ordinatenachse die Geburtszeiten t sämtlicher Individuen von einem gemeinsamen Zeitpunkte O nach einem irgend wie geteilten Maßstab aufgetragen. Dann ist das im Zeitpunkte Ot_0 geborene, zur Zeit $O\tau_0$ vorhandene Individuum durch den Schnittpunkt $(t_0\tau_0)$ zweier, zu den Achsen paralleler, in den Abständen Ot_0 und $O\tau_0$ vom Koordinatenanfangspunkt gezogener Geraden bestimmt. Die in der Geraden t_0t_0' liegenden Punkte repräsentieren die Lebenspunkte aller im Zeitpunkte Ot_0 geborenen Personen Nachdem das Individuum vor dem Zeitpunkte $O\tau_0 = Ot_0$ nicht in Erscheinung treten kann, so befindet sich sein Geburtenpunkt im Eckpunkte B des gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreieckes OAB. Durch eine Parallele Bt_0' wird nur ein Individuum charakterisiert; der Endpunkt derselben ist der Todespunkt. Die zur selben Zeit Geborenen werden durch *ein System* unendlich naher Parallelen bestimmt. Aus diesen Vorbemerkungen geht hervor:

1. Die einzelnen Individuen der Gesamtheiten werden durch Parallele zur Abszisse, welche sämtlich in einer um 45° zu dieser geneigten Geraden ihren Ausgangspunkt nehmen, die Individuallinien, repräsentiert. Jeder Punkt einer solchen Linie ist ein *Lebenspunkt*, der *Anfangspunkt* ein *Geburtenpunkt*, der *Endpunkt* ein *Todespunkt*.

2. Die um 45° geneigte Gerade OG „die Geburtenachse“ ist der *Träger* aller Geburtenpunkte; die auf die Streckeneinheit entfallende Zahl der Geburtenpunkte die Geburtendichtigkeit (Geburtenfrequenz).

3. Die Gesamtheiten von Lebenden werden allgemein durch irgend welche gerade oder krumme Linien festgehalten (charakterisiert), welche

jede Parallele zur Abszisse in einem Punkte schneiden; die Linien sind die Träger der Gesamtheiten.

4. Die Gesamtheiten von Toten liegen in Flächen, welche durch geschlossene Linien begrenzt werden.

§ 8. Die Lebendengesamtheiten der Bevölkerungsstatistik. Man kann im Quadranten $Ot\tau$ unendlich viele Linien ziehen, welche die Linien der Lebenden je in einem Punkte schneiden: *sohin gibt es theoretisch unendlich viele Lebendengesamtheiten.* Unter diesen werden praktisch nur jene dargestellt, welche eine der unterschiedenen kontinuierlichen Ursachen t, n, τ unmittelbar als Träger besitzen, somit die Personen gleicher Geburtszeit, gleichen Alters und gleicher Beobachtungszeit. Die Individuen gleicher Geburtszeit führen nicht zu Gesamtheiten, weil zur selben Zeit nur unendlich wenig Personen geboren werden. Von den beiden anderen Gesamtheiten sind die ersteren offenbar die Schnittpunkte der Individuallinien mit den Parallelen zu OG *„den Alterslinien"*, die letzteren die Schnittpunkte der Individuallinien mit den Parallelen zu Ot *„den Zeitlinien"*.

Über diese Gesamtheiten kann man folgendes ableiten:

a) *Die Gesamtheiten gleichaltrig Lebender.* Die Sterblichkeit der Individuen dieser Gesamtheit variiet nur insofern, als hierauf die Geburtszeit Einfluß nimmt (§ 3a). Die Individuen, deren Geburtszeiten höchstens um ein Kalenderjahr auseinanderstehen, liegen innerhalb der Schnittpunkte der Alterslinie mit zwei entsprechend auseinander stehenden Individuallinien und werden *Hauptgesamtheiten erster Gattung* genannt. Man bezeichnet sie zweckentsprechend mit $V_n^{t_1, t_2}$, wenn n das Alter der Gesamtheit, t_1 und t_2 die Geburtszeiten der Individuallinien bedeuten.

In der Figur 1 erscheint die Hauptgesamtheit durch ab repräsentiert. Weil man aber die Grenzpunkte a, b der Gesamtheiten auch durch den Schnitt der Individuallinien mit den Zeitlinien τ_1 und τ_2 bilden kann, so folgt, daß die Hauptgesamtheiten erster Gattung auch durch $V_n^{\tau_1, \tau_2}$ oder durch $V_n^{t_1, \tau_2}$ oder endlich durch $V_n^{\tau_1, t_2}$ darstellbar sind.

Beispielsweise sind die 50jährigen Personen, welche zwischen dem 1. Januar und letzten Dezember des Jahres 1850 geboren sind, also der Generation des Jahres 1850 angehören, identisch mit den Personen, welche das 50. Altersjahr im Jahre 1900 erreichen, oder mit den Personen, welche, nach dem 1. Januar 1850 geboren, das 50. Altersjahr vor dem 31. Dezember 1900 erreichen, oder endlich

mit den Personen, welche, vor dem 31. Dezember 1850 geboren, das 50. Altersjahr nach dem 1. Januar 1900 erreichen.

Dieses Ergebnis läßt sich folgendermaßen ausdrücken:

Die Gesamtheit Gleichaltriger derselben Generation ist stets einer Gesamtheit von Individuen gleich, welche das gleiche Alter im selben Kalenderjahr erreichen oder einer Gesamtheit von Individuen, welche nach einem bestimmten Termine geboren sind, das gleiche Alter jedoch vor einem anderen bestimmten Termine erreichen oder endlich einer Gesamtheit von Individuen, welche, vor einem bestimmten Zeitpunkt geboren, dasselbe Alter nach einem anderen bestimmten Termin erreichen.

b) *Die Gesamtheiten gleichzeitig Lebender.* Die Änderung der Sterblichkeit der Individuen dieser Gesamtheit ist nur durch die Änderung der Sterblichkeit mit dem Alter bedingt (§ 3: c). Die Individuen, deren Alter höchstens um 1 Jahr auseinanderstehen, liegen innerhalb der Schnittpunkte der Zeitlinie mit zwei entsprechend auseinanderstehenden Alterslinien und werden Hauptgesamtheiten *zweiter* Gattung genannt. Man bezeichnet sie zweckentsprechend mit $V_\tau^{n_1/n_2}$, wenn τ die Zählzeit der Gesamtheit, n_1 und n_2 die Grenzalter der Gesamtheit bedeuten.

In der Figur wird die Gesamtheit durch bc repräsentiert. In Analogie mit den Auseinandersetzungen für die Hauptgesamtheiten der ersten Gattung erhält man $V_\tau^{n_1\ n_2} = V_\tau^{t_2/t_1} = V_\tau^{n_1/t_1} = V_\tau^{t_2/n_2}$ oder den nachstehenden Satz: Die Gesamtheit gleichzeitig Lebender eines bestimmten Alters ist stets einer Gesamtheit gleich, welche derselben Generation entstammend den gleichen Zeitpunkt erlebt, oder einer Gesamtheit, welche, nach einem bestimmten Zeitpunkte geboren, einen anderen Zeitpunkt nach Erreichen eines bestimmten Alters erlebt oder endlich einer Gesamtheit, welche, vor einem bestimmten Zeitpunkt geboren, einen anderen Zeitpunkt vor Erreichen eines bestimmten Alters erlebt.

Von besonderer Wichtigkeit ist die Erkenntnis, daß die Hauptgesamtheiten erster Gattung auf keine Weise unmittelbar in Hauptgesamtheiten zweiter Gattung überführt werden können, weil beide Gesamtheiten sich immer um Totengesamtheiten unterscheiden müssen. Man ersieht dies unmittelbar aus der Figur.

Beispielsweise unterscheiden sich die 50jährigen Personen der Generation des Jahres 1850 von den Personen, welche am 31. Dezember 1900 zwischen den Altern 50 und 51 stehen, um die Personen, welche aus der Generation 1850 stammend nach Vollendung des Alters 50, jedoch vor dem 31. Dezember 1900 sterben.

§ 9. Die Totengesamtheiten der Bevölkerungsstatistik. Wenn man unter einer Totengesamtheit eine Summe von Individuen versteht, welche unter nahezu gleichen Ursachen, also in nahen Altern und Beobachtungszeiten sterben, dann gibt es unendlich viele Totengesamtheiten. Als solche repräsentiert sich nämlich die Summe der Todespunkte in jeder begrenzten Fläche mit kleinen Durchmessern. Zu einer beschränkten Zahl gelangt man, wenn man als Begrenzung lediglich Linien aus den Parallelsystemen zu OG, Ot und $O\tau$ zuläßt. Anzahl und Gestaltung solcher Gesamtheiten ergibt sich, wenn man von der aus ihnen darstellbaren, kompliziertesten Figur ausgeht und alle geschlossenen Flächen aufsucht, welche aus der sukzessiven Elimination der Grenzlinien entstehen. Dieser Prozeß wird an der nachstehenden Figur erläutert (Fig. 2):

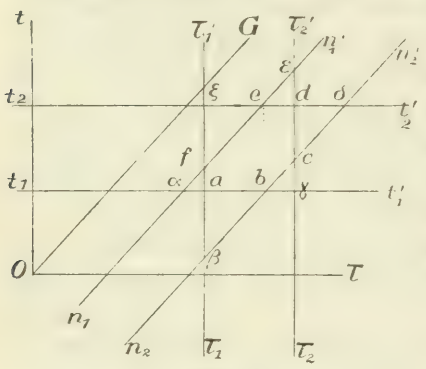


Fig. 2.

Die komplizierteste Figur ist das Sechseck *abcdef*, das durch je 2 um eine Einheit auseinanderstehenden Linien der 3 Parallelsysteme begrenzt wird. Durch Elimination je einer Linie gelangt man zu den 6 Fünfecken und zwar: durch Elimination von *af* zu *abcde*; von *ab* zu $\beta cdef$; von *bc* zu $\gamma defa$; von *cd* zu $\delta efab$; von *de* zu $\varepsilon fabc$; von *ef* zu $\zeta abcd$. Die Viereckgesamtheiten kann man aus den Fünfecken ableiten, wenn man immer je eine Seite der letzteren wegläßt.

So bilden sich beispielsweise aus dem Fünfeck *abcde* durch Elimination von *bc*: $a\gamma de$; von *cd*: $ab\delta e$; von *de*: $abc\varepsilon$, welche sämtlich geschlossen sind; durch Elimination von *ab* das offene Viereck $\infty cde\infty$, von *ae* das offene Viereck $\infty bcd\infty$. Die Zahl der aus einem Fünfeck bildbaren, geschlossenen Vierecke ist sohin 3; die Gesamtzahl der aus dem Sechseck ableitbaren Vierecke $3 \times 6 = 18$. Von denselben bleiben jedoch, weil der Bildungsprozeß jedes Viereck zweimal erzeugt, nur die Hälfte, also 9 Vierecke übrig. Von diesen sind, wie man unmittelbar sieht, 3 Vierecke Parallelogramme und 6 Vierecke Trapeze.

Aus den Vierecken entstehen die möglichen Dreiecke wieder durch Hinweglassung je einer Seite. *Geschlossene* Figuren können sich überhaupt nur durch Elimination einer, nämlich der oberen Parallelen

der 6 Trapeze bilden. Es werden somit 6 Dreiecke erzeugt. Nachdem aber der Erzeugungsprozeß selbst jedes der Dreiecke dreimal bildet, gibt es im Ganzen 2 Dreiecksgesamtheiten.

Daraus folgt: *die Zahl der aus den 3 Parallelsystemen bildbaren Totengesamtheiten beläuft sich auf 18; darunter sind 1 Sechsecksgesamtheit, 6 Fünfecksgesamtheiten, 3 Parallelogramme, 6 Trapeze und 2 Dreiecke. Von diesen werden die Sechsecksgesamtheiten, Fünfecksgesamtheiten und Trapeze praktisch als zu kompliziert nicht nachgewiesen.*

Die Parallelogramme werden *Hauptgesamtheiten*, die Dreiecke *Grundgesamtheiten* von Toten genannt. Für die Trapeze wird die Bezeichnung *Nebengesamtheiten* gebraucht.

Nachstehend sollen die einzelnen Gesamtheiten behandelt bezw. gezeigt werden: in welchen Grenzen die kontinuierlichen Ursachen einer Totengesamtheit liegen, welche Beziehungen mit den Lebendengesamtheiten bestehen und zu welchen Sterbenswahrscheinlichkeiten die Totengesamtheiten verwendet werden können.

Die I. Hauptgesamtheit von Toten (Fig. 1).

Die I. Hauptgesamtheit $abcd$ ist durch zwei Linien aus dem System der zu OG und zwei Linien aus dem System der zu $O\tau$ Parallelen begrenzt. Sie enthält *die Summe der aus einer Generation zwischen zwei Altern Sterbenden.* Die Toten liegen demnach im Alter und der Geburtszeit um je eine Einheit, in der Beobachtungszeit jedoch um zwei Einheiten auseinander. Beispielsweise liegen die im Alter von 50 Jahren aus der Generation des Jahres 1850 Sterbenden zwischen dem 1. Januar 1900 und dem 31. Dezember 1901; der am 1. Januar 1850 Geborene an seinem Geburtstag Sterbende stirbt am 1. Januar 1900, der am 31. Dezember 1850 Geborene im Alter von 50 Jahren und 364 Tagen Sterbende stirbt am 30. Dezember 1901. Die Gesamtheit soll in Zukunft mit $M_{n_1, n_2}^{t_1, t_2}$ bezeichnet werden.

Die Beziehungen zwischen der I. Hauptgesamtheit von Toten und den begrenzenden Lebendengesamtheiten gehen aus der folgenden Erwägung hervor:

Die im Raume $abcd$ Sterbenden müssen die Grenzlinie $n_1 n_1'$ lebend überschritten, dürfen jedoch die Grenzlinie $n_2 n_2'$ nicht mehr erreicht haben; sohin besteht $abcd = ab - cd$ oder

$$M_{n_1, n_2}^{t_1, t_2} = V_{n_1}^{t_1, t_2} - V_{n_2}^{t_1, t_2}, \qquad \text{(IV)}$$

d. h. *die Summe der aus einer Generation zwischen zwei Altern Sterbenden kommt dem Unterschiede der im unteren Alter in die Beobachtung*

Eintretenden und der im oberen Alter aus der Beobachtung Austretenden gleich

Die I. Hauptgesamtheit der Toten ist demnach die Differenz zweier Hauptgesamtheiten der Lebenden I. Gattung. Aus der I. Hauptgesamtheit läßt sich, wie leicht ersichtlich, ein einziges Sterblichkeitsmaß, nämlich die Sterbenswahrscheinlichkeit Gleichaltriger

$$\frac{abcd}{ab} = \frac{M^{t_1\ t_2}_{n_1,\ n_2}}{\Gamma^{t_1/t_2}_{n_1}}$$

bilden.

Die Sterbenswahrscheinlichkeit gleichaltriger Personen ist einem Quotienten gleich, in dessen Nenner gleichaltrige Personen, in dessen Zähler die vor Vollendung des nächsten Altersjahres aus den beobachteten Lebenden hervorgehenden Toten stehen. Man bezeichnet dieses Maß vielfach als das wichtigste, weil die Sterblichkeit nach Altern bestimmende Maß. Praktisch ist es erst in der neuesten Zeit nachgewiesen worden, weil die hierzu erforderlichen Lebenden- und Totengesamtheiten nicht unmittelbar beobachtet werden. Das einzige Mittel, die Lebendengesamtheiten in der Bevölkerung zu bestimmen, ist nämlich die Volkszählung[1]; dieselbe entwickelt jedoch nur die Gesamtheiten gleichzeitig Lebender. Die Totengesamtheiten werden Jahr für Jahr aus den Totenregistern bestimmt: die erste Hauptgesamtheit von Toten liegt aber in zwei aufeinanderfolgenden Kalenderjahren.

Die II. Hauptgesamtheit von Toten (Fig. 1).

Die II. Hauptgesamtheit *bcdi* ist durch zwei Linien aus dem System der zu Ot und zwei Linien aus dem System der zu $O\tau$ Parallelen begrenzt. *Sie enthält die Summe der aus einer Generation zwischen zwei um ein Jahr auseinanderliegenden Kalendertagen Sterbenden.* Die Toten liegen demnach in der Geburtszeit und Beobachtungszeit um ein Jahr, im Alter jedoch — wie die Figur zeigt — um 2 Jahre auseinander. Beispielsweise ist das Sterbealter der aus der Generation des Jahres 1850 stammenden im Jahre 1900 verstorbenen Personen teilweise das Alter 49, teilweise das Alter 50; der am 1. Januar 1900 Sterbende, am 31. Dezember 1850 Geborene, ist an seinem Todestage 49 Jahre, der am 31. Dezember 1900 Sterbende, am 1. Januar 1850 Geborene, nahe 51 Jahre alt. Die Gesamtheit soll in Zukunft mit $M^{t_1/t_2}_{\tau_1/\tau_2}$ bezeichnet werden.

---

1) Körösi teilt mit, daß er die Bevölkerung der Stadt Budapest während zweier Jahre individuell festgehalten habe (Körösi, Unterlagen für richtige Mortalitätstabellen 1874).

Genau so, wie für die Hauptgesamtheiten der Toten erster Gattung läßt sich für die Hauptgesamtheiten zweiter Gattung eine Beziehung mit den Lebendengesamtheiten ableiten, nämlich:

$$M_{\tau_1,\,\tau_2}^{t_1,\,t_2} = V_{\tau_1}^{t_1/t_2} - V_{\tau_2}^{t_1/t_2}, \qquad \text{(V)}$$

d. h. *die Summe der aus einer Generation zwischen zwei Kalenderjahren Sterbenden kommt dem Unterschiede der an einem bestimmten Kalendertage eines Jahres in die Beobachtung Eintretenden und der am selben Kalendertage des folgenden Jahres aus der Beobachtung Austretenden gleich.*

Die II. Hauptgesamtheit von Toten ist demnach die Differenz zweier Hauptgesamtheiten der Lebenden II. Gattung. Auch aus der II. Hauptgesamtheit der Toten läßt sich ein einziges Sterblichkeitsmaß, die *Sterbenswahrscheinlichkeit gleichzeitig Lebender* bilden. Dasselbe ist $\frac{bcdi}{bc} = \frac{M_{\tau_1,\,\tau_2}^{t_1,\,t_2}}{V_{\tau_1}^{t_1,\,t_2}}$, sohin einem Quotienten gleich, in dessen Nenner gleichzeitig Lebende, in dessen Zähler die von diesen im nächsten Kalenderjahre Sterbenden stehen.

Die III. Hauptgesamtheit von Toten (Fig. 1).

Die III. Hauptgesamtheit $bcde$ ist durch zwei Linien aus dem System der zu OG und zwei Linien aus dem System der zu Ot Parallelen begrenzt. Sie enthält die *Summe der in einem Kalenderjahr in einem bestimmten Alter Sterbenden.* Die Toten liegen im Alter und in der Beobachtungszeit um ein Jahr, in der Geburtszeit um 2 Jahre auseinander. Beispielsweise stammen die 50jährigen Toten des Jahres 1900 teilweise aus dem Jahre 1849, teilweise aus dem Jahre 1850; der am 1. Januar 1900 im Alter von 50 Jahren 364 Tagen Sterbende entstammt der Generation des Jahres 1849, der am 31. Dezember 1900 am Geburtstage Sterbende der Generation des Jahres 1850. Die Gesamtheit soll in Zukunft mit $M_{n_1,\,n_2}^{\tau_1/\tau_2}$ bezeichnet werden.

Die mit den verschiedenen Lebendengesamtheiten bestehende Beziehung ist nach der Figur:

$$bcde = bc + be - cd - de$$

oder

$$M_{n_1\ n_2}^{\tau_1\ \tau_2} = V_{\tau_1}^{n_1\ n_2} + V_{n_1}^{\tau_1\ \tau_2} - V_{n_2}^{\tau_1\ \tau_2} - V_{\tau_2}^{n_1,\,n_2}, \qquad \text{(VI)}$$

d. h. *die Summe der in einem Kalenderjahr zwischen zwei Altern Sterbenden ist gleich der Summe der Personen, welche zu Beginn des Kalenderjahres zwischen zwei aufeinanderfolgenden Altern stehen und der Personen, welche innerhalb des Kalenderjahres das untere Alter erreichen, vermindert um die Summe der Personen, welche am Ende des*

Kalenderjahres zwischen denselben zwei Altern stehen und der Personen, welche innerhalb des Kalenderjahres das obere Alter erreichen.

Zur Bildung der III. Hauptgesamtheit von Toten bedarf es daher der Lebendengesamtheiten beider Gattungen. Aus der III. Hauptgesamtheit läßt sich keine Sterbenswahrscheinlichkeit entwickeln, weil die Toten derselben weder aus der Grenzlinie bc noch aus der Grenzlinie be hervorgehen. Man nennt die Größen $\frac{2bcde}{bc+ed} = \frac{2 M^{n_1/n_2}_{\tau_1/\tau_2}}{V^{n_1/n_2}_{\tau_1} + V^{n_1/n_2}_{\tau_2}}$ und $\frac{2bcde}{be+cd} = \frac{2 M^{\tau_1/\tau_2}_{n_1/n_2}}{V^{\tau_1/\tau_2}_{n_1} + V^{\tau_1/\tau_2}_{n_2}}$, also die Quotienten aus der III. Hauptgesamtheit von Toten und dem arithmetischen Mittel der durch zwei parallele Grenzlinien repräsentierten Lebendengesamtheiten, *Sterblichkeitskoeffizienten*. Es wird späterhin gezeigt werden, daß diese näherungsweise immer auf Sterbenswahrscheinlichkeiten überführt werden können.

Die Grundgesamtheiten der Toten (Fig. 1).

Die Grundgesamtheiten abc und bcd werden durch je eine Parallele aus den drei Systemen zu OG, $O\tau$ und Ot begrenzt. Sie sind entweder: die Summen der *nach* einem bestimmten Zeitpunkte Geborenen, *nach* Erreichung eines bestimmten Alters, jedoch *vor* Ablauf eines bestimmten Kalendertages Sterbenden (abc) oder die Summe der *vor* einem bestimmten Zeitpunkte Geborenen, *vor* Erreichung eines bestimmten Alters, jedoch *nach* Ablauf eines bestimmten Kalendertages Sterbenden (bcd). Die Toten liegen nach allen 3 kontinuierlichen Ursachen, dem Alter, der Geburtszeit und der Zählzeit um ein Jahr auseinander. Die Gesamtheiten sollen in Zukunft (je nach der Lage der Grenzlinien) mit ${}_nG^t_\tau$ und ${}_\tau G^t_n$ bezeichnet werden. Die Geburtszeit wird also immer an die Spitze, die Gesamtheit mit der größeren Anzahl von Lebenden am Fuße des Buchstabens G links, die mit der kleineren Anzahl am Fuße rechts angeschrieben.

Die Grundgesamtheiten können mit den Hauptgesamtheiten der Toten und Lebenden in Beziehung gesetzt werden. Es besteht für die Hauptgesamtheiten der Toten:

$$M^{t_1\ t_2}_{n_1\ n_2} = {}_{n_1}G^{t_1}_{\tau} + {}_{\tau}G^{t_2}_{n_2}; \qquad (\mathrm{VII}_1)$$

$$M^{t_1/t_2}_{\tau_1/\tau_2} = {}_{\tau_1}G^{t_2}_{n} + {}_{n}G^{t_1}_{\tau_2}; \qquad (\mathrm{VII}_2)$$

$$M^{\tau_1/\tau_2}_{n_1/n_2} = {}_{\tau_1}G^{t}_{n_2} + {}_{n_1}G^{t}_{\tau_2}; \qquad (\mathrm{VII}_3)$$

ferner für die Hauptgesamtheiten der Lebenden:

$$ {}_{\tau}G_n^t = V_{\tau}^{n/t} - V_n^{\tau,\,t} \qquad (\mathrm{VIII}_1) $$

und

$$ {}_{n}G_{\tau}^t = V_n^{t/\tau} - V_{\tau}^{t,\,n}; \qquad (\mathrm{VIII}_2) $$

d. h.: 1. Jede Hauptgesamtheit von Toten setzt sich aus zwei Grundgesamtheiten von Toten zusammen; 2. Jede Grundgesamtheit von Toten ist die Differenz einer Lebendengesamtheit erster und einer Lebendengesamtheit zweiter Gattung.

Aus den Gleichungen VIII folgt der wichtige Satz:

$$ V_n^{t/\tau} = V_{\tau}^{t/n} + {}_{n}G_{\tau}^t \quad \text{bezw.} \quad V_{\tau}^{n/t} = V_n^{\tau/t} + {}_{\tau}G_n^t . \qquad (\mathrm{VIII}_3) $$

Eine Hauptgesamtheit der Lebenden erster Gattung ist somit der Summe einer Hauptgesamtheit der Lebenden zweiter Gattung und einer Grundgesamtheit von Toten gleich; umgekehrt läßt sich auch eine Hauptgesamtheit der Lebenden zweiter Gattung als Summe einer Hauptgesamtheit der Lebenden erster Gattung und einer Grundgesamtheit von Toten darstellen.

Beispielsweise ist die Zahl der Personen, welche aus der Generation des Jahres 1850 das Alter von 50 Jahren erreichen, gleich der Zahl der Personen, welche aus dieser Generation den 1. Januar 1901 erleben, vermehrt um die Personen, welche aus dieser Generation nach Vollendung des 50. Altersjahres, jedoch vor dem 1. Januar 1901 sterben.

Man kann auch aus den Grundgesamtheiten Sterblichkeitsmaße (die Elementarwahrscheinlichkeiten) konstruieren. $w_{n/\tau} = \frac{{}_{n}G_{\tau}^{t_1}}{V_n^{t_1/t_2}}$ ist die Wahrscheinlichkeit eines $n$jährigen, vor Ablauf jenes Kalenderjahres zu sterben, in welches der n^{te} Geburtstag fällt; und $w_{\tau/n} = \frac{{}_{\tau}G_n^{t_2}}{V_{\tau}^{t_1/t_2}}$ ist die Wahrscheinlichkeit eines zu Beginn des Kalenderjahres, in welchem das n^{te} Altersjahr vollendet wird, Lebenden, vor Vollendung dieses Altersjahres zu sterben.

Die Elementarwahrscheinlichkeiten sind immer Teile der vollständigen Wahrscheinlichkeiten und zwar annäherungsweise die Hälfte der Wahrscheinlichkeit gleichaltrig und gleichzeitig Lebender.

Die Beobachtung der Grundgesamtheiten gestaltet sich insofern schwieriger als die der Hauptgesamtheiten von Toten, weil für die letzteren bloß zwei, für die ersteren drei Bestimmungsstücke gegeben sein müssen. So sind die 50jährigen Toten des Jahres 1900 eine (die III.) Hauptgesamtheit; sie zerfallen in die Generationen der Jahre 1849 und 1850 als die zusammensetzenden Grundgesamtheiten.

§ 10. Anwendungen der Theorie der zweimächtigen Gesamtheiten. Die Theorie der Gesamtheiten hat sich für die Lösung der komplizierteren Fragen der Sterblichkeitsmessung als überaus fruchtbar erwiesen. Nachstehend werden einige bemerkenswerte Fälle der Anwendung behandelt:

a) Die Formel für die Sterbenswahrscheinlichkeiten Gleichaltriger wurde bereits auf S. 32 aufgestellt, hierbei jedoch bemerkt, daß sie für den Gebrauch unzugänglich ist, weil die darin vorkommenden Elemente nicht beobachtet werden. Transformiert man nun den Zähler des Ausdruckes mit Hilfe der Formel VII_1, den Nenner mit Hilfe der Formel VIII_3, so erhält man in derselben lauter der unmittelbaren Beobachtung zugängliche Werte. Es ist nämlich

$$w_n = \frac{{}_nG_\tau^{t_1} + {}_\tau G_{n+1}^{t_2}}{V_\tau^{t_1\ n} + {}_nG_\tau^{t_1}}. \qquad \text{(IX)}$$

Um die Sterbenswahrscheinlichkeiten Gleichaltriger zu entwickeln, hat man darnach die Lebenden am Tage der Volkszählung nach Altersklassen (bezw. Geburtszeiten) einzuteilen und aus den Totenregistern die Grundgesamtheiten des unmittelbar vorausgehenden und folgenden Jahres, welche durch den Zählungstermin selbst begrenzt werden, zu konstatieren. So müssen beispielsweise bei Konstatierung der Sterblichkeit aus der Volkszählung des Jahres 1900 zur Bildung des Nenners einerseits die der Generation des Jahres 1850 angehörigen, am 31. Dezember 1900 noch lebenden Individuen, andererseits diejenigen Individuen ermittelt werden, welche nach dem 1. Januar des Jahres 1850 geboren, vor dem 31. Dezember 1900 nach Erreichung des 50. Altersjahres gestorben sind; zur Bildung des Zählers dieselbe Gesamtheit von Toten, andererseits jene Individuen, welche vor dem 1. Januar des Jahres 1851 geboren, vor Erreichung des 51. Altersjahres, jedoch nach dem 31. Dezember 1900 gestorben sind.

Das diesem Zwecke entsprechende Schema könnte nach folgendem Muster entworfen werden.

Formular II.

Geburtsjahr	Alter (Differenz des Zähl- und Geburtsjahres) n	Lebende des Geburtsjahres am Zähltage	Verstorbene: nach Vollendung des Alters n und vor Eintritt des Zähltermines	Verstorbene: vor Vollendung des Alters $n+1$ und nach Eintritt des Zähltermines
1	2	3	4	5

Jeder Verstorbene erscheint durch 3 Stücke definiert.

b) Sehr häufig kommt es vor, daß der Termin der Volkszählung nicht mit dem Ende des Kalenderjahres zusammenfällt. Im Königreich Sachsen ist der Volkszählungstermin der 1. Dezember jedes Quinquenniums. Wie sich hierdurch die Gesamtheiten komplizieren, geht abermals aus der Figur 1 hervor. Es ist nämlich für $\tau_0\tau_0'$ als dem Volkszählungstermin die Sterbenswahrscheinlichkeit in den Zeichen der Figur

$$w_n = \frac{ahf + fhbc + bcd}{gf + ahf - bgh},$$

und daraus ergibt sich für den Kopf des Zählformulars ohne weiteres die folgende Form:

Formular III.

Geburtsjahr x	Alter x (Differenz des Zähl- und Geburtsjahres)	Lebende des Zählertermines gf	Gesamtheiten der Verstorbenen aus dem Geburtsjahr und dem Kalenderjahr vor dem Zählertermine im Alter x bis $x+1$	Kalenderjahr nach dem Zählertermine im Alter $x-1$ bis x	Kalenderjahr nach dem Zählertermine im Alter x bis $x+1$	dem Zählertermine folgenden Kalenderjahr im Alter x bis $x+1$
1	2	3	4	5	6	7

Hier stehen in Kolonne 3 die Lebendengesamtheiten gf, in den Kolonnen 4—7 der Reihe nach die Totengesamtheiten ahf, hgb, $hfbc$, bcd.

c) Oftmals sind nicht die zur unmittelbaren Konstruktion der Sterbenswahrscheinlichkeiten erforderlichen Gesamtheiten, sondern die Hauptgesamtheiten 3. Gattung, jedoch für Abschnitte eines Kalenderjahres (für Vierteljahre oder Monate, sogenannte Elementargesamtheiten) gegeben. Es entsteht sodann die Aufgabe, die Hauptgesamtheiten erster oder zweiter Gattung näherungsweise zu konstruieren. Im allgemeinen läßt die skizzierte Aufgabe drei Fälle zu und zwar sind entweder 1. die Alter und die Beobachtungszeiten für den Eintritt des Todes in gleichen Abschnitten und zwar Bruchteilen eines Jahres; oder 2. nur die Alter oder 3. nur die Beobachtungszeiten in diesen Abschnitten, die restierenden Stücke jedoch in ganzen Jahren gegeben. Alle diese 3 Fälle erledigen sich in den nachfolgenden, für die Todesfälle von Kindern im 1. Lebensjahre entworfenen 3 Figuren 3_1, 3_2 und 3_3.

Es werden in einem ebenen rechtwinkligen Koordinatensystem auf der Abszisse die Eintrittszeiten des Todes, auf der Ordinate die Geburtszeiten der Generationen aufgetragen. Im Koordinatenanfangs-

punkte liege der Anfang des dem Beobachtungsjahre vorausgehenden Jahres. Die Distanzen zwischen den engeren Parallelen bedeuten die Abschnitte des Jahres oder Alters, in welchen die Beobachtung stattfindet ($^1/_4$ Jahr).

Im ersten Falle sind innerhalb zweier Altersjahre und zweier um ein Jahr unterschiedenen Kalendertage, sohin in der Hauptgesamtheit 3. Gattung *abcd* 16 verschiedene Elementargesamtheiten $a_{i\varrho}$ ent-

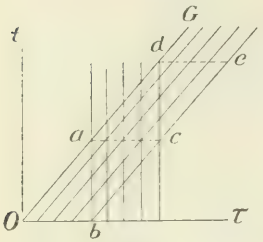


Fig. 3_1.

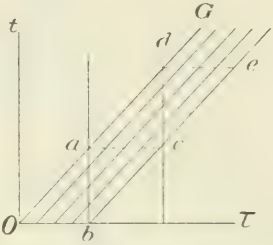


Fig. 3_2.

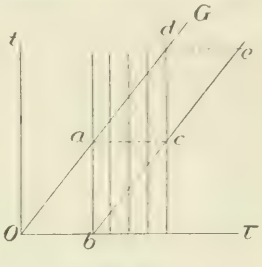


Fig. 3_3.

halten, wobei sich der Index i auf das Alter des Individuums beim Tode und ϱ auf die Sterbezeit bezieht. Die einen Bestandteil der Hauptgesamtheit erster Gattung *acde* bildende Grundgesamtheit *acd* setzt sich näherungsweise wie folgt zusammen:

$$acd = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44}) + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{23} + a_{24} + a_{34}.$$

Im zweiten Falle setzt sich die Hauptgesamtheit 3. Gattung aus 4 Elementarparallelogrammen zusammen, welche der Reihe nach, je nach dem *Todesalter* mit a_1, a_2, a_3, a_4 bezeichnet werden sollen. Näherungsweise kann die Grundgesamtheit *acd* wieder, wie folgt, gebildet werden:

$$acd = \frac{1}{8}(7a_1 + 5a_2 + 3a_3 + a_4).$$

Im letzten Falle setzt sich die Hauptgesamtheit 3. Gattung gleichfalls aus 4 Elementarparallelogrammen zusammen, welche wieder der Reihe nach, je nach der Sterbezeit mit a_1, a_2, a_3, a_4 bezeichnet werden sollen. Die Grundgesamtheit *acd* wird sohin gebildet aus

$$acd = \frac{1}{8}(a_1 + 3a_2 + 5a_3 + 7a_4).$$

Die ganze Hauptgesamtheit erster Gattung wird selbstverständlich nur erhalten, wenn auch die Beobachtungen für das Folgejahr angestellt werden können. Es ergibt sich sodann für *acde*, wenn man die Elementargesamtheiten des Folgejahres durch Striche gegen-

über den analogen Elementargesamtheiten des Beobachtungsjahres kenntlich macht und zwar für den ersten Fall:

$$acde = \frac{1}{2}(a_{11} + a'_{11}) + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a'_{21} + \frac{1}{2}(a_{22} + a'_{22}) + a_{23} + a_{24} + a'_{31} + a'_{32} + \frac{1}{2}(a_{33} + a'_{33}) + a_{34} + a'_{41} + a'_{42} + a'_{43} + \frac{1}{2}(a_{44} + a'_{44}),$$

für den zweiten Fall

$$= \frac{1}{8}[(7a_1 + a'_1) + (5a_2 + 3a'_2) + (3a_3 + 5a'_3) + (a_4 + 7a'_4)],$$

für den dritten Fall endlich

$$= \frac{1}{8}[(a_1 + 7a'_1) + (3a_2 + 5a'_2) + (5a_3 + 3a'_3) + (7a_4 + a'_4)].$$

Der Erfolg dieser Näherung hängt teils von der Anzahl der Teile, in welche die Gesamtheiten zerlegt werden, teils von der Art der Elementarparallelogramme ab. Die weitaus größte Genauigkeit liefert die Zerlegung nach 3_1. Ob die Zerlegung nach 3_2 oder 3_3 bessere Dienste leistet, hängt davon ab, ob die Veränderung der Elementargesamtheiten mehr durch die Änderungen nach dem Alter oder nach der Beobachtungszeit beeinflußt wird.

Die Zerlegung von Hauptgesamtheiten in Elementargesamtheiten wird in zahlreichen Fällen, insbesondere zur Ermittlung der Kindersterblichkeit benützt. Bei Kindern des ersten Lebensjahres gibt man beispielsweise die Todesfälle öfters nach Alters- und Sterbemonaten an. In solchem Falle werden unter den 144 Elementargesamtheiten der Hauptgesamtheit dritter Gattung $(acde)$ der ersten Hauptgesamtheit:

1. die Hälfte der im Januar zwischen dem 0. und 1. Altersmonat Verstorbenen;
2. die Hälfte der im Februar zwischen dem 1. und 2. Altersmonat und die im selben Kalendermonate zwischen dem 0. und 1. Altersmonat Verstorbenen;
3. die Hälfte der im März zwischen dem 2. und 3. Altersmonat und die im selben Kalendermonate zwischen dem 0. bis 2. Altersmonat Verstorbenen

usw. angehören.

Würden die Toten nur nach Kalendermonaten ausgewiesen, so wird man aus den im Januar Verstorbenen (gemäß Figur 3_3) $\frac{1}{24}$, aus

den im Februar Verstorbenen $\frac{3}{24}$, aus den im März Verstorbenen $\frac{5}{24}$ usf. aussondern und zur Gesamtheit adc vereinigen.

Nach Lexis (Abhandlungen zur Theorie der Bevölkerungs- und Moralstatistik) wurde die Kindersterblichkeit nach dem Schema der Figur 3_1 in Belgien bis zum Jahre 1864 gegeben. Für Preußen werden die Verstorbenen des ersten halben Monates nach Tagen ausgewiesen; in Frankreich wurde die Kindersterblichkeit zwischen 0—1 Monat, 1—6 Monaten und 6—12 Monaten angegeben. Die italienische Statistik gibt die Unterabteilungen für das 1. Altersjahr von 0—1 Monat, 1—3, 3—6, 6—9 und 9—12 Monaten.

d) Zwischen den Sterblichkeitskoeffizienten und den Sterbenswahrscheinlichkeiten gleichzeitig oder gleichaltrig Lebender besteht ein ziemlich einfacher analytischer Zusammenhang, welcher an der Hand der Figur 1 abgeleitet werden soll. Bezeichnet man als Sterblichkeitskoeffiienten $q = \frac{2\,bcde}{bc + de}$, dann kann man $bcde$ zunächst in die beiden Grundgesamtheiten bcd und bde zerlegen und die Beziehung

$$bde : abc = de : bc$$

benützen. Man schließt sodann

$$bcde = bcd + abc\frac{de}{bc} = abcd + abc\,\frac{de - bc}{bc} = abcd\,\frac{bc + de}{2bc}.$$

Dividiert man beiderseits durch $\frac{bc + de}{2}$ und nennt $\frac{abcd}{ab} = w_a$, so erhält man

$$q = \frac{abcd}{bc} = \frac{abcd}{ab - \frac{abcd}{2}} = \frac{w_a}{1 - \frac{w_a}{2}},$$

oder

$$w_a = \frac{q}{1 + \frac{q}{2}}.$$

Setzt man hingegen $q_1 = \frac{2bcde}{be + dc}$, so wird man nach Zerlegung des Zählers in die Grundgesamtheiten die Relation $cdi : bde = cd : be$ benützen. Es besteht sodann

$$bcde = bcdi\,\frac{cd + be}{2\,cd},$$

woraus wieder folgt

$$q_1 = \frac{bcdi}{cd} = \frac{bcdi}{bc - bcd} = \frac{w_\tau}{1 - \frac{w_\tau}{2}} \quad \text{oder endlich} \quad w_\tau = \frac{q_1}{1 + \frac{q_1}{2}}.$$

Zu einer anderen Ableitung der Beziehung zwischen Sterbenswahrscheinlichkeit und Sterblichkeitskoeffizienten gelangt man durch den[1]) Satz, daß die Sterbenswahrscheinlichkeit einer durch Zugang und Abgang sich ändernden Bevölkerung dem Quotienten aus den Toten durch die Summe der Lebenden und dem halben Inkrement der Wanderungen gleich sei. Gemäß der Bezeichnungen der Figur 1 erhält man:

$$w = \frac{bcde}{bc + \frac{1}{2}(be - cd)}.$$

Nun ist $bcde = bc + be - cd - de$ und somit

$$w = \frac{2bcde}{bc + ed + bcde},$$

was man in den schon bekannten Bezeichnungen für die Lebenden- und Totengesamtheiten auch schreiben kann:

$$w = \frac{2 M_{n_1 n_2}^{\tau_1 \tau_2}}{V_{\tau_1}^{n_1 n_2} + V_{\tau_2}^{n_1 n_2} + M_{n_1 n_2}^{\tau_1 / \tau_2}}.$$

§ 11. Anderweitige Darstellung der zweimächtigen Gesamtheiten. Einen sehr breiten Raum in der Literatur nimmt Knapp-Zeuners Darstellung der Lebenden- und Totengesamtheiten sowie des letzteren Repräsentation dieser Gesamtheiten im Raume ein. Nach ihm werden die Lebendenmassen als Kontinuen zweier unabhängig Veränderlichen, des Alters und der Geburtszeit, aufgefaßt. In jedem sehr kleinen Zeitteilchen werde nämlich eine sehr kleine, durch die Geburtszeit bestimmte, der Größe des Zeitteilchens proportionale Menschenmasse $f(o, t)\,dt$ geboren; von dieser erreichen $f(x, t)\,dt$ Individuen das Alter x und sterben im Alter x bis zum Alter $x + dx$: $f(x, t)\,dt - f(x + dx, t)\,dt = -\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\,dx\,dt$ Individuen.

Hieraus lassen sich die Gesamtheiten der Lebenden und Toten rechnungsmäßig entwickeln. Es ist die I. Hauptgesamtheit der Lebenden, also der Lebenden, welche zwischen t_1 und t_2 geboren, das Alter $x = \xi$ erreichen:

$$V_{\xi}^{t_1 t_2} = \int_{t_1}^{t_2} f(\xi, t)\,dt \qquad (X_1)$$

Um sodann die II. Hauptgesamtheit, also die Gesamtheit der Individuen zu erhalten, welche zwischen den Altern x_1 und x_2 die

1) im § 20 entwickelten

Zählzeit $\tau = z$ erreichen, hat man in dem letzteren Integral für t auf Grundlage der Beziehung $x + t = \tau$ die Variable τ zu substituieren und τ selbst konstant, beispielsweise $= z$ anzunehmen. Diese Voraussetzung ergibt zunächst für $dt = -dx$ und sodann für die gesuchte Gesamtheit

$$V_z^{x_1\, x_2} = -\int_{x_1}^{x_2} f(x, z - x)\, dx. \qquad (X_2)$$

Man kann selbstverständlich die beiden eben entwickelten Formen auf andere Variabeln und Grenzen überführen. So wird, wenn man in X_1 statt t die Variable τ einsetzt:

$$V_\xi^{\tau_1\, \tau_2} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\xi, \tau - \xi)\, d\tau,$$

und wenn man in X_2 statt x die Variable t substituiert:

$$V_z^{t_2/t_1} = \int_{t_1}^{t_2} f(z - t, t)\, dt.$$

Es bestehen sohin für die Gesamtheiten mehrere Darstellungsweisen und insbesondere ist

$$V_\xi^{t_1/t_2} = V_\xi^{\tau_1/\tau_2} \text{ sowie } V_z^{x_1\, x_2} = V_z^{t_2\, t_1}$$

Die Gesamtheiten der Toten werden durch das Doppelintegral nach dem Differential $-\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} dx dt$ dargestellt. Die verschiedenen Gattungen desselben resultieren, je nachdem die Integrationsgrenzen sich ändern, und zwar muß das Doppelintegral bei der

I. Hauptgesamtheit der Toten, d. i. den Individuen, welche zwischen zwei Altern und zwei Geburtszeiten sterben, zwischen zwei festen Grenzen von x und t; bei der

II. Hauptgesamtheit der Toten, d. i. den Individuen, welche zwischen zwei Geburtszeiten und zwei Kalenderjahren sterben, zwischen zwei festen Grenzen von t und τ; bei der

III. Hauptgesamtheit der Toten, d. i. den Individuen, welche zwischen zwei Altern und Kalenderjahren sterben, zwischen zwei festen Grenzen von x und τ;

endlich bei den Elementargesamtheiten zwischen zwei festen Grenzen der t und ferner einer in x variablen Grenze der τ an der Eingangs-, sowie einer festen Grenze der x an der Ausgangsseite oder zwischen zwei festen Grenzen der t und einer festen Grenze der x an der Eingangs-, sowie einer in x variablen Grenze der τ an der Ausgangsseite

genommen werden.

Bei Einführung der Grenzen ergeben sich, wie man ohne Schwierigkeiten ableiten kann, sofort die in IV bis VI und VIII abgeleiteten Beziehungen zwischen Lebenden- und Totengesamtheiten. Die Totengesamtheiten sind nämlich sämtlich in der Formel $-\int\int \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\,dx\,dt$ enthalten; führt man also die Integration über das partielle Differential unter Festhaltung eines bestimmten t durch und bezeichnet den Wert von x für jedes beliebige t an der oberen (rechten) Grenze der Gesamtheit mit x_2, an der unteren (linken) Grenze der Gesamtheit mit x_1, dann erhält man

$$M = -\int\int \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\,dx\,dt = \int_{t_1}^{t_2} f(x_1,t)dt - \int_{t_1}^{t_2} f(x_2,t)dt, \qquad \text{(XI)}$$

worin t_1 und t_2 die äußersten Geburtszeiten des geschlossenen Raumes bedeuten.

Die Figur 4 veranschaulicht an einer völlig allgemeinen Totengesamtheit die Bedeutung des in (XI) gefundenen Resultates. Beide Integrale auf der rechten Seite der Gleichung sind Lebendengesamtheiten, weil sie die Gesamtheit der Schnittpunkte der Individuallinien mit einer querdurchlaufenden Schnittlinie enthalten, und zwar ist das erste Integral die Gesamtheit der Lebenden, welche in die Totengesamtheit eintreten, und das zweite Integral die Gesamtheit der Lebenden, welche aus der Totengesamtheit austreten. Sohin ergibt sich der völlig allgemeine Satz: *Jede beliebige Totengesamtheit kommt der Differenz der in dieselbe eintretenden und der aus derselben austretenden Lebendengesamtheiten gleich.* Die aus den Formeln (IV) bis (VI) und (VIII) abgeleiteten Sätze sind nur spezielle Fälle dieses Theorems.

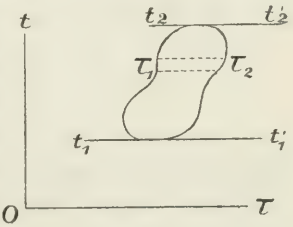


Fig. 4.

Die Knapp-Zeunersche Darstellungsweise der Gesamtheiten ist in zahlreichen Fällen angewendet worden. Die wichtigste Anwendung dürfte in der Darstellung *der Gesamtheiten mit herrschender Absterbeordnung* — das sind Gesamtheiten, deren Absterben nur vom Alter, nicht aber von der Zeit der Geburt abhängt — bestehen. Für diese läßt sich die obige Funktion $f(x,t)dt$ als Produkt zweier Funktionen $\varphi(t)dt \cdot \psi(x)$ ausdrücken, wobei $\varphi(t)dt$ die in der Geburtszeit t bis $t+dt$ Geborenen, die Geburtenfolge und $\psi(x)$ die Absterbeordnung bedeutet. Man erhält sodann:

1. als Lebendengesamtheit I. Gattung:

$$V_{\xi}^{t_1,\,t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)\,dt\,\psi(x) = \psi(x)[\Phi(t_2) - \Phi(t_1)],$$

wenn das unbestimmte Integral von $\varphi(t)dt$ mit $\Phi(t)$ bezeichnet wird. Man findet sohin für eine herrschende Absterbeordnung die aus einer Zeitstrecke Geborenen, das Alter x Erlebenden, wenn man die Zahl der Geborenen mit dem Werte der Absterbeordnung für dieses Alter multipliziert;

2. als Lebendengesamtheit II. Gattung:

$$V_{z}^{x_1,\,x_2} = -\int_{x_1}^{x_2} \varphi(z - x)\,\psi(x)\,dx.$$

Aus der Form des Integrales ergibt sich sofort, daß eine Trennung der Absterbeordnung von der Geburtenfolge im allgemeinen bei den Hauptgesamtheiten der Lebenden II. Gattung nicht möglich ist.

3. als Hauptgesamtheiten der Toten völlig allgemein:

$$M = -\int\int \varphi(t)\,\frac{\partial\psi(x)}{\partial x}\,dx\,dt.$$

Bei der ersten Hauptgesamtheit der Toten ist zwischen festen Grenzen von x und t zu integrieren, und man findet:

$$M_{x_1,\,x_2}^{t_1,\,t_2} = -[\psi(x_2) - \psi(x_1)][\Phi(t_2) - \Phi(t_1)].$$

Die aus einer bestimmten Generation zwischen zwei Altern Sterbenden kommen dem Produkte der Geborenen dieser Generation mit dem Unterschiede der Werte der Absterbeordnung zu Beginn und am Ende des Alters gleich. Als Quotient von $M_{x_1,\,x_2}^{t_1,\,t_2}$ und von $V_{x_1}^{t_1,\,t_2}$ ergibt sich $1 - \frac{\psi(x_2)}{\psi(x_1)}$, das sind die Werte der Sterbenswahrscheinlichkeiten.

Bei herrschender Absterbeordnung führt demnach der Quotient der Verstorbenen I. Gattung und der Lebenden I. Gattung unmittelbar zu den Sterbenswahrscheinlichkeiten, *welche Geburtenfolge auch besteht.*

Die beiden anderen Hauptgesamtheiten der Toten führen nicht unmittelbar zu den Sterbenswahrscheinlichkeiten. Diese werden, wie oben erwiesen wurde, immer auf Hauptgesamtheiten der Lebenden II. Gattung und demnach auf Funktionen reduziert, für welche die Aussonderung der Absterbeordnung von der Geburtenfolge nicht gelingt.

Knapp hat aus der Aussonderungsfähigkeit der Absterbeordnung einen besonderen Vorzug für die I. Hauptgesamtheiten der Toten und der Lebenden abzuleiten versucht; diese Eigenschaft geht aber verloren, wenn die Annahme der herrschenden Absterbeordnung nicht zutrifft.

Auch eine geometrische Verdeutlichung wurde zur Darstellung der Lebenden- und Totengesamtheiten als Kontinuen zweier unabhängiger Variabler von Zeuner gegeben. Trägt man nämlich die Werte der Funktion $z = f(x,t)$ als Parallele zur z-Achse in einem dreiachsigen, rechtwinkligen Koordinatensystem mit x als Abszisse und t als Ordinate auf, so ergeben die Endpunkte eine kontinuierliche Fläche, „die Lebensfläche“ (Fig. 5).

Die verschiedenen Lebenden- und Totengesamtheiten werden wie folgt dargestellt:

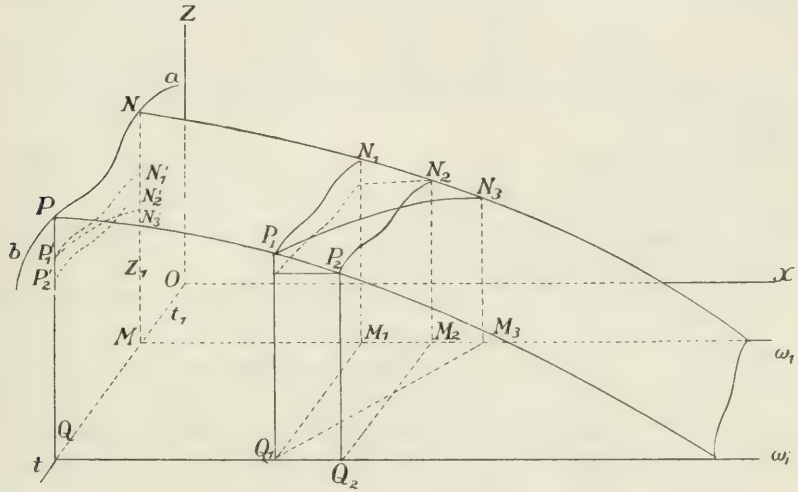


Fig. 5.

1. Das unendlich kleine Rechteck $f(o,t_1)dt$ in der zot-Ebene $MNPQ$ ist die *Geburtenmenge* in der Zeit t_1 bis $t_1 + dt$; die Fläche $\int_{t_1}^{t_2} f(o,t)\,dt$ die Geburtenmenge von der Zeit t_1 bis t_2; die Linie ab die Geburtenfolge; das unendlich kleine Rechteck $M_1N_1P_1Q_1$ also $f(x,t)dt$ die Gesamtheit der Überlebenden der Geburtenmenge $f(o,t)dt$ des Alters x; endlich die Projektion jenes Stückes der Lebensfläche auf die zot-Ebene, welches von $f(x,t)dt$ und $f(x+dx,t)dt$ abgeschnitten wird, $P_1'N_1'P_2'N_2'$ das Totendifferential $-\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx\,dt$.

2. Der Schnitt der Lebensfläche mit einer Parallelebene zu xoz, $t_1z_1w_1$ stellt die jeweilig Überlebenden der t_1 Geborenen, sohin die Absterbeordnung dar.

3. Die Gesamtheit der Lebenden I. Gattung ($M_1N_1Q_1P_1$ als eine

endliche Fläche gedacht) kommt dem Inhalte jener Fläche auf der im Abstande vom Koordinatenanfangspunkte $x = \xi$ liegenden Parallelebene zu zot gleich, welche durch den Schnitt der Lebensfläche, die Schnitte mit den Parallelebenen zu xoz im Abstande t_1 und t_2 und den Schnitt mit der xot-Ebene begrenzt wird.

4. Die Gesamtheit der Lebenden II. Gattung kommt dem Inhalte der Projektion von $M_3 N_3 P_1 Q_1$ auf die xoz-Ebene $M N_3' P_1' Q$ gleich. Erstere Fläche befindet sich auf einer auf der xot-Ebene senkrechten, um 45° gegen die xoz-Ebene und zot-Ebene geneigten Ebene und wird durch den Schnitt mit der Lebensfläche, die Parallelebenen zu zot im Abstande x_1 und x_2 und die xot-Ebene begrenzt. Der *unbegrenzte* Schnitt einer solcher Ebene mit der Lebensfläche bezw. deren Projektion repräsentiert die Ergebnisse einer Volkszählung.

5. Die Gesamtheiten der Toten sind die Projektionen von Stücken der Lebensfläche auf die Ebene zot, welche je nach der Art der Gesamtheit durch die Schnitte der verschiedenen Lebendengesamtheiten mit der Lebensfläche begrenzt werden.

6. Die Lebenden- und Totengesamtheiten auf der zot-Ebene sind sämtlich durch krumme Linien abgegrenzt. Wenn man als Repräsentationen jedoch die entsprechenden Projektionen der Lebensfläche auf die xot-Ebene auffaßt, dann erhält man durchweg geradlinige Figuren. In der nebenstehenden Figur 6 sind die Lebendengesamtheiten I. Gattung kurzweg mit AB, die Lebendengesamtheiten II. Gattung mit BC und die verschiedenen Totengesamtheiten mit $ABCD$ (I. Gattung), $BCDE$ (II. Gattung), $BCDF$ (III. Gattung) bezeichnet. Lexis hat die letzterwähnte Repräsentation zur Entwickelung der bereits abgeleiteten Lehrsätze über die Gesamtheiten in Vorschlag gebracht (Abhandlungen aus der Theorie der Bevölkerungs- und Moralstatistik).

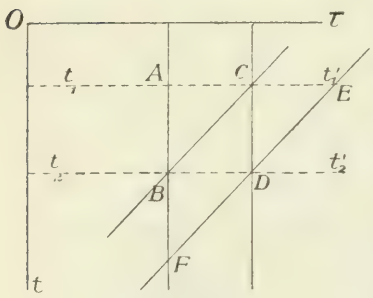


Fig. 6.

Prinzipiell unterscheidet sich die Darstellungsweise Beckers von der nach Zeuner und Lexis dadurch, daß bei der ersteren auf den Koordinatenachsen durchwegs gleiche Qualitäten, nämlich Zeiten (Geburts- und Beobachtungszeiten), bei den beiden letzteren ungleiche Qualitäten (Geburtszeiten und Alter, ev. verbunden noch mit Lebenden) dargestellt werden. Der Koordinatenanfangspunkt ist sodann, je

nachdem er Ausgangspunkt der einen oder anderen Achse ist, immer von anderer Wesenheit.

Aus der Zeunerschen Darstellungsweise wurde eine besondere Deutung für den Zweck der Ermittelung der Gesamtheiten abgeleitet:

Das Endziel der Beobachtung der Gesamtheiten sei nicht die Absterbeordnung, sondern die Kenntnis der Lebenden nach ihrem Altersaufbau zu jeder beliebigen Zeit, demnach die Kenntnis der Lebensfläche. Zu ihrer Darstellung führt die Feststellung des Altersaufbaues zu einer ganz bestimmten Zeit im Wege der Volkszählung, sowie die Feststellung von Zu- und Abgang — durch Wanderung und Tod — demnach des Bevölkerungswechsels im Wege jährlicher Registerführung.

§ 12. Die dreimächtigen Gesamtheiten (Vorbemerkungen). Die dreimächtigen Gesamtheiten können ganz in Analogie der zweimächtigen Gesamtheiten behandelt werden. Sie zerfallen wie diese in ein- oder zweidimensionale Gesamtheiten, je nachdem die Werte der einen Ursache für alle Individuen gleich sind und die der beiden anderen Ursachen wechseln, oder jedes Individuum zu verschiedenen Werten aller drei Ursachen gehört. Es sollen die ersteren Flächengesamtheiten, die letzteren Raumgesamtheiten heißen. Auch hier kann es wie bei den zweimächtigen Gesamtheiten zu einer stets wachsenden, derselben Maßzahl angehörigen Anzahl von Individuen nur kommen, falls für dieselbe Flächengesamtheit die Verschiedenheit in engen Grenzen der beiden, für dieselbe Raumgesamtheit diese Verschiedenheit der drei wechselnden Ursachen zugelassen wird. Zu jeder Flächengesamtheit gehört daher ein *Träger* und die Begrenzung durch zwei Ursachen, zu jeder Raumgesamtheit die Begrenzung durch drei Ursachen.

Die Theorie der dreimächtigen Gesamtheiten soll an den Lebenden- und Totengesamtheiten ausgelesener Leben erörtert werden. Die Sterbenswahrscheinlichkeiten derselben hängen nämlich außer von den Ursachen der Sterbenswahrscheinlichkeiten der Bevölkerungsstatistik — dem Alter und der Geburtszeit — noch von einer weiteren Ursache, der Versicherungsdauer, ab.[1])

[1]) Die Abhängigkeit nach der Versicherungsdauer ist einerseits als Folge der ärztlichen Auslese, andererseits des freiwilligen Austrittes aus der Versicherungsanstalt anzusehen. Die Versicherungswerber werden nämlich beim Eintritt ob ihres Gesundheitszustandes untersucht. Von vornherein steht zu erwarten, daß das von den Ärzten ausgelesene Material eine niedrigere Sterblichkeit haben müsse, als die Leben der allgemeinen Bevölkerung. Die geringere Anfangssterblichkeit geht jedoch einer rapiden Steigerung zu; einerseits,

Auch bei den dreimächtigen Gesamtheiten kann man zum Zwecke der leichteren Übersicht von der geometrischen Repräsentation Gebrauch machen. In Analogie der Repräsentation der Gesamtheiten der allgemeinen Bevölkerung nach Becker kann man auf den Achsen eines rechtwinkligen Raumkoordinatensystems und zwar auf der x-Achse die Zeit der Beobachtung, auf der y-Achse die Zeit des Eintrittes in die Versicherungsgesellschaft, auf der z-Achse die Geburtszeit auftragen. Der Koordinatenanfangspunkt repräsentiert zweckmäßig für alle drei Achsen denselben Zeitpunkt. Dann folgt:

1. Jeder Versicherte ist durch seine Geburtszeit und seine Eintrittszeit bestimmt; seine Lebensmomente liegen sohin in einer auf der Ebene yoz senkrechten Geraden. Jeder Punkt einer solchen Geraden ist ein Lebensmoment, der Endpunkt der Todespunkt. Die Repräsentationslinien der Individuen sollen *Individuallinien* heißen; sie sind zur x-Achse parallel. Alle Ebenen, welche parallel zur x-Achse liegen, können eine oder mehrere Individuallinien gänzlich in sich enthalten und heißen *Individualebenen*.

2. Die Individualebenen haben stets sehr wenig Individuallinien in sich, können daher niemals Träger einer Gesamtheit sein; dagegen sind alle Flächen, welche jede Individuallinie höchstens einmal schneiden, sohin insbesondere alle Ebenen, welche nicht mit Individualebenen zusammenfallen, als Träger von Lebendengesamtheiten möglich. Die in einem geschlossenen Raum enthaltenen Todespunkte sind die Totengesamtheiten.

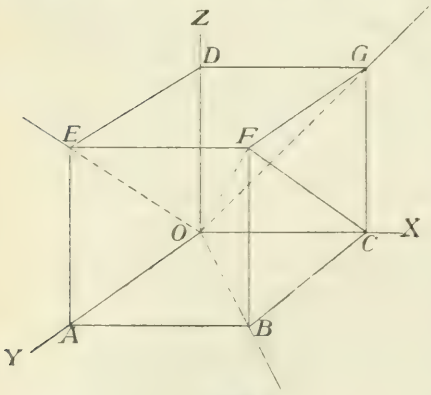


Fig. 7.

3. Über die Bedeutung der wichtigsten Ebenen und Linien gibt die Figur 7 Aufschluß. Die Ebenen parallel zur xoy-Ebene enthalten die zur selben Zeit Geborenen, welche zu verschiedenen Zeiten eingetreten sind und repräsentieren die Menge der Individuen gleicher Geburtszeiten. Die Ebenen parallel zur xoz-Ebene enthalten die zur selben

weil Selektion nur Aussonderung der *sichtlich* minderwertigen Risken ist und in einer gewissen Zeit immer die *latenten* Schäden hervortreten; andrerseits weil die *gesundverbleibenden* Risken aus vielfachen, zumeist wirtschaftlichen Ursachen von der Versicherung freiwillig in stärkerem Maße, als die erkrankenden Risken zurücktreten.

Zeit in die Gesellschaft Eingetretenen, welche zu verschiedenen Zeiten geboren sind und repräsentieren daher die Menge der Individuen gleicher Eintrittszeiten. Die Ebenen parallel zu yoz endlich enthalten die zur selben Zeit vorhandenen, in verschiedenen Zeiten eingetretenen und geborenen Personen und repräsentieren daher die Gesamtheiten der gleichzeitig Lebenden.

4. Von großer Bedeutung sind ferner die drei Systeme von Ebenen (Ebenenbüschel), welche zu den durch eine Koordinatenachse gehenden, zu den beiden anderen Koordinatenachsen um 45^0 geneigten Ebenen parallel sind. Die Ebene durch die x-Achse : xoE enthält alle Individuallinien, für welche die Zeit des Eintrittes der Zeit der Geburt gleich ist, somit alle Lebenspunkte der seit der Geburt Versicherten. Die Parallelebenen zu dieser repräsentieren die Individuen gleicher Eintrittsalter. Die Ebene durch die y-Achse : yoG enthält die Geburtenpunkte im allgemeinen; die Parallelebenen sind die Gesamtheiten Gleichaltriger. Die Ebene durch oz : zoB enthält die Eintrittspunkte sämtlicher Versicherter. Die Parallelebenen sind die Gesamtheiten der Individuen gleicher Versicherungsdauer. Die drei Ebenen xoE, yoG und zoB schneiden sich in der Geraden oF, dem Träger der Geburtenpunkte der seit Geburtszeit Versicherten.

5. Die in die Beobachtung der Versicherungsgesellschaften fallenden Lebenspunkte liegen in einer dreiseitigen Pyramide, deren Scheitel in den Koordinatenanfangspunkt fällt und welche als Kanten die Geraden OF, OB und OC hat, sohin in der Pyramide $OBCF$.

6. Jede Individuallinie läßt sich als Schnittlinie von Parallelebenen zu xoz, xoE, xoy auffassen. Es kann sohin jedes Individuum als Summe der Lebenspunkte der zur selben Zeit Geborenen und Eingetretenen (repräsentiert durch den Schnitt des xoy- und des xoz-Systems), der zur selben Zeit in einem bestimmten Lebensalter Eingetretenen (repräsentiert durch den Schnitt des xoE- und xoz-Systems), der zur selben Zeit Geborenen eines bestimmten Beitrittsalters (repräsentiert durch den Schnitt des xoy- und xoE-Systems) dargestellt werden.

7. Zu ein und demselben Individuum gehören mehrere Individuallinien, wenn das Individuum auf Grund verschiedener Auslese mehrfach versichert ist. Dieselben liegen jedoch sämtlich in einer Parallelebene zur xoy-Ebene.

Man nennt mehrfache Versicherungen, welche zur Bildung mehrerer Individuallinien für dieselbe Person Anlaß geben, *„eigent-*

liche" Mehrversicherungen, alle anderen „*uneigentliche*" Mehrversicherungen.[1])

Nach solchen Auseinandersetzungen ist es leicht, die Anzahl der Lebenden- und Totengesamtheiten, sowie die Art derselben und die Beziehungen der Gesamtheiten unter einander zu entwickeln und zu zeigen, wie viele Wahrscheinlichkeiten sich daraus ergeben und welchen von ihnen in praktischer und theoretischer Beziehung der Vorzug gebührt.

Bevor jedoch in diese Erörterungen eingegangen wird, soll eine Bezeichnungsweise eingeführt werden, mit Hilfe deren die Bedeutung der Resultate leichter übersehen wird. Die Gesamtheiten der versicherten Individuen (gleichgültig, ob Lebende oder Verstorbene) sind stets durch drei Angaben bestimmt: die Geburtszeit a_1, die Eintrittszeit a_2 und die Beobachtungszeit a_3. Diese Angaben werden durch die Systeme der Parallelebenen zu xoy, xoz, yoz repräsentiert. Aus denselben kann man durch Subtraktion je zweier Werte und zwar durch $a_2 - a_1 = a_{12}$ das Eintrittsalter, durch $a_3 - a_1 = a_{13}$ das Beobachtungsalter, endlich durch $a_3 - a_2 = a_{23}$ die Versicherungsdauer ableiten, welche wieder durch die Systeme der Parallelebenen zu xoE, yoG, zoB dargestellt werden. Die in Frage kommenden Ebenensysteme sollen in der Folge kurzweg mit $a_1, a_2, a_3, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ bezeichnet werden.

Statt ein Individuum durch a_1, a_2, a_3 zu bestimmen, kann es auch durch irgend eine Verbindung einzelner dieser Zahlen mit den Resultaten a_{12}, a_{13}, a_{23} definiert werden, wobei nur zu beachten ist, daß in der Verbindung keines der wesentlichen Bestimmungsstücke verloren geht.[2]) Solche Verbindungen sind beispielsweise a_1, a_2, a_{13} oder a_1, a_2, a_{23} oder a_1, a_{12}, a_{13} usf. jedoch nicht a_1, a_2, a_{12}. Die Theorie der Gesamtheiten befaßt sich mit der Summe der durch dieselben Merkmale definierten Individuen gleicher Art. Aufgabe derselben ist es, nachzuweisen, welche Gesamtheiten und Sterblichkeitsmaße überhaupt möglich sind, bezw. welche Gesamtheiten und daraus resultierende Sterblichkeitsmaße die geringste Mühe bei ihrer Darstellung fordern.

1) Die ersteren entstehen durch Auslese zu verschiedener Zeit; die letzteren werden auf Grund derselben Auslese, vielfach als *gleichzeitige* Versicherungen, im Wege der Reduktion, Abänderung oder Teilung der ursprünglichen Versicherung aufscheinen.

2) Man erkennt derartige Verbindungen schon äußerlich am Index der a, welche immer alle drei Ziffern 1, 2 und 3 enthalten müssen.

§ 13. Die Lebendengesamtheiten der Versicherten. Gemäß den bisherigen Entwickelungen gibt es, wenn man die Träger der Gesamtheiten auf die in Figur 7 dargestellten sechs Ebenensysteme beschränkt und die Gesamtheiten desselben Trägers als zur selben Gattung gehörig bezeichnet, im ganzen drei Gattungen von Lebendengesamtheiten und zwar das Parallelsystem zur

zoy-Ebene $= a_3$, dessen Gesamtheiten kurzweg als englische Gesamtheiten oder Gesamtheiten gleichzeitig Lebender,

zoB-Ebene $= a_{23}$, dessen Gesamtheiten kurzweg als Gotha-Gesamtheiten oder Gesamtheiten gleicher Versicherungsdauer,

yoG-Ebene $= a_{13}$, dessen Gesamtheiten kurzweg als deutsche Gesamtheiten oder Gesamtheiten Gleichaltriger

bezeichnet werden sollen.

Jede *Gattung* von Lebendengesamtheiten zerfällt in mehrere *Arten* je nach den Grenzlinien. Diese letzteren können durch die Schnittlinien mit den restierenden 5 Ebenensystemen gebildet werden. Die Zahl und Art der Begrenzungen ist durch die Zahl und Art der geschlossenen Figuren, welche aus diesen Linien erzeugt werden können, bedingt. Begrenzungen gibt es, nachdem jedes Ebenensystem sich mit 2 Parallelen an den Figuren auf jedem Träger beteiligen kann, 1 Zehneck, 10 Neunecke, $\frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45$ Achtecke, $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$ Siebenecke usf. Bei genauer Erwägung erkennt man aber leicht, daß die Figuren wesentlich an Zahl vermindert werden, weil die Schnittlinien aus verschiedenen Systemen vielfach zusammenfallen. Diesbezüglich ist der unmittelbar einleuchtende Satz von Wichtigkeit, daß zwei Ebenensysteme, welche sich in einem Parallelsystem schneiden, das zum Träger parallel ist, auch immer dasselbe System von Schnittlinien auf dem Träger erzeugen. Es ist nun leicht zu sehen, daß unter den 5 Parallelsystemen immer je 2 Paare zu einer und derselben Geraden parallel liegen. So erzeugen auf jedem Träger a_3 die Ebenensysteme a_1 und a_{13}, ferner die Ebenensysteme a_2 und a_{23}; auf jedem Träger a_{13} die Ebenensysteme a_1 und a_3 sowie a_{23} und a_{12}; auf jedem Träger a_{23} die Ebenensysteme a_2 und a_3, sowie a_{12} und a_{13} dasselbe System von Schnittlinien. Daraus folgt, daß auf jedem Träger nur drei verschiedene Liniensysteme entstehen und zwar, wie die für jeden Träger im einzelnen durchgeführte Untersuchung zeigt, auf allen drei Trägern die gleichen Systeme, nämlich a_1, a_2 und a_{12}.

Die auf einem Träger befindlichen geschlossenen Figuren werden

sohin durch drei Parallelsysteme erzeugt, von welchen eines, nämlich a_{12}, um 45^0 gegen die beiden anderen aufeinander senkrechten a_1 und a_2 geneigt ist. Die daraus hervorgehenden Begrenzungstypen wurden aber bereits bei den Totengesamtheiten der allgemeinen Bevölkerung (den zweimächtigen Gesamtheiten) abgeleitet.

Durch Übertragung der für diese gefundenen Resultate erhält man die folgenden Sätze:

1. Die kompliziertesteste Begrenzung einer Lebendengesamtheit ist ein Sechseck; aus diesem sind sechs Fünfecke, drei Parallelogramme, sechs Trapeze und zwei Dreiecke ableitbar.

2. Wird von den Sechsecks-, Fünfecks- und Trapez-Gesamtheiten wegen der umständlichen Darstellung abgesehen, dann verbleiben die drei Parallelogramme als Begrenzungen für die *Hauptgesamtheiten* und die beiden Dreiecke als Begrenzungen für die *Grundgesamtheiten*. Es sollen demnach zunächst die *Hauptgesamtheiten* der Lebenden behandelt werden.

Behufs einfacher Darstellung werden diese Lebendengesamtheiten mit V bezeichnet und wird ihnen am Fuße ein den Träger, am Kopfe ein die Begrenzungen charakterisierender Index beigefügt. Ferner sollen in allen drei Lebendengattungen als

I. Hauptgesamtheit die Leben gleicher Geburtszeit und Eintrittszeit, sohin $V_3^{1,2}$, $V_{23}^{1,2}$, $V_{13}^{1,2}$,

II. Hauptgesamtheit die Leben gleicher Geburtszeit und gleichen Eintrittsalters, sohin $V_3^{1,12}$, $V_{23}^{1,12}$, $V_{13}^{1,12}$,

III. Hauptgesamtheit die Leben gleicher Eintrittszeit und gleichen Eintrittsalters, sohin $V_3^{2,12}$, $V_{23}^{2,12}$, $V_{13}^{2,12}$

bezeichnet werden.

Die Bestimmungsstücke der Gesamtheiten unterscheiden sich in doppelter Art:

1. Sie sind entweder direkt gegeben (a_1, a_2, a_3) oder werden nur (*als relative Bestimmungsstücke*) durch Rechnung ermittelt (a_{12}, a_{13}, a_{23}). Diese Ermittelung ist in der Regel weitwendig und vermehrt die Fehlermöglichkeit; 2. *die aus den Grenzlinien für die Individuen der Gesamtheiten ableitbaren Bestimmungsstücke* sind in größerer oder geringerer Zahl eindeutig oder zweideutig, d. h. derart beschaffen, daß sie nur einer oder zwei Zeit- oder Alterseinheiten angehören.

Eindeutig sind nämlich die letzteren, wenn die sie repräsentierenden Flächen zur Durchschnittslinie des Trägers mit einem der Bestimmungsstücke parallel sind.

Beispielsweise sind, wenn a_3 (eine Zeitebene) der Träger, und a_1 und a_2, die Geburts- und Eintrittsebene, Grenzen sind, die Ebenen a_{13} und a_{23} parallel den Durchschnittslinien des Trägers mit den ersteren Ebenen; die erwähnte Gesamtheit hat ein einziges doppeldeutiges Bestimmungsstück, nämlich a_{12}. Andererseits wird bei demselben Träger und den Grenzen a_1, a_{12} nur *ein* weiteres eindeutiges Bestimmungsstück resultieren, nämlich a_{13}, während a_2 und a_{23} zweideutig bleiben. Nachstehend folgt eine Zusammenstellung über die sämtlichen Lebendengesamtheiten, die ein- und zweideutigen Bestimmungsstücke:

Laufende Nummer	Träger der Gesamtheit	Begrenzung	Unter den nicht benannten Bestimmungsstücken sind		Gattung der Gesamtheit
			eindeutig	zweideutig	
1	a_3	a_1 a_2	a_{13} a_{23}	a_{12}	englische
2		a_{12}	a_{13}	a_2 a_{23}	Gesamtheit
3		a_2 a_{12}	a_{23}	a_1 a_{12}	„
4	a_{13}	a_1 a_2	a_3	a_{12} a_{23}	deutsche
5		a_{12}	a_3 a_{23}	a_2	Gesamtheit
6		a_2 a_{12}	a_{23}	a_1 a_3	„
7	a_{23}	a_1 a_2	a_3	a_{12} a_{13}	Gotha-
8		a_{12}	a_{13}	a_2 a_3	Gesamtheit
9		a_2 a_{12}	a_3 a_{13}	a_1	„

Es gibt sohin unter den 9 Lebendengesamtheiten 6 mit 3 und 3 mit 4 eindeutigen Bestimmungsstücken.

Zur Darstellung der ersten Gesamtheit führt das folgende Formular IV:

Kalenderjahr des Eintrittes N[1])

Kalenderjahr des Austrittes aus der Beobachtung[2])	Zahl der Austritte der aus dem Kalenderjahr der Geburt G_{x+i} Stammenden im Kalenderjahr der Beobachtung[3])						
	G_x		G_{x+1}		G_{x+2}		. . . .
	einzeln	Summe von unten	einzeln	Summe von unten	einzeln	Summe von unten	
N							
$N+1$							
$N+2$							
.							
.							

Dieses Schema bleibt auch für die Bestimmung aller anderen Hauptgesamtheiten von Lebenden bis auf den Umstand aufrecht, daß die Titelüberschriften modifiziert werden und zwar:

Die Titelüberschrift sub 1) kehrt in den Gesamtheiten 3, 4, 6, 7, 9 wieder und ändert sich in „Eintrittsalter“ für die Gesamtheiten 2, 5, 8;

die Titelüberschrift sub 3) kehrt in den Gesamtheiten 2, 4, 5, 7, 8 wieder und ändert sich in diesem nur „Kalenderjahr der Geburt“ in „Eintrittsalter“ für die Gesamtheiten 3, 6, 9;

die Titelüberschrift sub 2) kehrt in den Gesamtheiten 2 und 3 wieder und ändert sich in „Austrittsalter nach Jahren“ für die Gesamtheiten 4, 5, 6 und in „Versicherungsdauer in Jahren“ für die Gesamtheiten 7, 8, 9.

Selbstverständlich müssen darnach auch die Texte sub 3) entsprechend rektifiziert werden.

Um die Gesamtheiten der ersten Gattung und Art zu erhalten, wird man zweckmäßig die nach der Eintrittszeit (Policenummern) geordneten Zählkarten zunächst nach den Kalenderjahren der Geburt und jede der Gruppen nach dem Austritt in den einzelnen Kalenderjahren zerlegen und nach Konstatierung der Anzahlen die entsprechenden Kolonnen des Formulars IV ausfüllen. Analog werden die übrigen Gesamtheiten bestimmt.

Die Lehre von den *Grundgesamtheiten* kann in Analogie der Lehre von den *Hauptgesamtheiten* entwickelt werden.

Die zu jedem Träger gehörigen Gesamtheiten sind stets von den Ebenen *gleicher Geburtszeit, gleicher Eintrittszeit* und *gleichen Eintrittsalters* begrenzt. Die beiden hierbei möglichen Gesamtheiten unterscheiden sich lediglich dadurch, daß der Jahrestag der Geburt *vor* oder *nach* dem Eintrittstage zu liegen kommt. Je nach dieser Unterscheidung soll von Grundgesamtheiten der *vorzeitig* oder der *nachzeitig* Eingetretenen gesprochen werden. Die dafür gewählten, leicht zu deutenden Zeichen sind: G_3^v, G_3^n für die englischen, G_{13}^v, G_{13}^n für die deutschen und G_{23}^v, G_{23}^n für die Gothaer Grundgesamtheiten.

Charakteristisch für die Grundgesamtheiten ist, daß jedes Individuum rücksichtlich der sechs möglichen Bestimmungsstücke eindeutig definiert wird.

Das zur Ermittlung der Grundgesamtheiten I. Gattung erforderliche Formular ist in V gegeben:

Jahrgang des Eintrittes N[1])

Kalenderjahr der Beobachtung[2])	3) Zahl der Austritte der aus dem Kalenderjahr der Geburt G_{x+i} Stammenden im Kalenderjahr der Beobachtung.							
	G_x				G_{x+1}			
	vorzeitig eingetreten		nachzeitig eingetreten		vorzeitig eingetreten		nachzeitig eingetreten	
	einzeln	Summe von unten	einzeln	Summe von unten	einzeln	Summe von unten	einzeln	Summe von unten

Dieses Schema bleibt für die Ermittlung der Gesamtheiten zweiter und dritter Gattung unverändert, nur daß in der Kolonne sub 2 für die Gesamtheiten zweiter Gattung „Austrittsalter" und für die Gesamtheiten dritter Gattung „Versicherungsdauer" zu stehen kommt und darnach auch der Titel sub 3) entsprechend rektifiziert wird.

§ 14. Die Totengesamtheiten und Sterbenswahrscheinlichkeiten Versicherter. Man könnte die Totengesamtheiten methodisch in derselben Art, wie die Lebendengesamtheiten entwickeln. Ausgehend von den möglichen Körpern, welche von 6 Ebenensystemen begrenzt werden, gelangt man unmittelbar zur Erkenntnis, daß als Totengesamtheiten der Versicherten 1 Zwölfflächner, 12 Elfflächner, $\frac{12,11}{1,2} = 66$ Zehnflächner usw. bildbar sind; ferner, daß sich die Zahl der Totengesamtheiten wesentlich reduziert, wenn man lediglich auf die Sechs- und Fünfflächner reflektiert und unter diesen beiden Gattungen nur wieder jene zur Bildung von Wahrscheinlichkeiten zuläßt, welche aus den gewonnenen Lebendengesamtheiten zu eigentlichen Wahrscheinlichkeiten führen. Diese müssen auf den letzteren aufstehen und parallel zu ox liegende Seitenflächen besitzen.

Solcher Totengesamtheiten gibt es 9 Sechsflächner und 6 Fünfflächner. Man kann die Sechsflächner in Analogie der zugehörigen Lebendengesamtheiten mit $M_3^{1,2}$, $M_3^{1,12}$, $M_3^{2,12}$, $M_{13}^{1,2}$ . . .; die Fünfflächner mit M_3^{v}, M_3^{n}, M_{13}^{v} . . . bezeichnen.

Die Konstatierung der Totengesamtheiten kann ganz nach einem dem Schema IV und V nachgebildeten Formular erfolgen. Für die Totengesamtheiten ist nämlich nur nötig, die Kolonnen „Summe von unten" wegzulassen.

Aus den bisherigen Ableitungen ergeben sich für die Sterbenswahrscheinlichkeiten Versicherter die nachstehenden Schlußfolgerungen:

1. Es gibt nicht weniger als 15 Sterbenswahrscheinlichkeiten für Versicherte und zwar 9 Sterbenswahrscheinlichkeiten, welche aus Hauptgesamtheiten und 6 Sterbenswahrscheinlichkeiten, welche aus Grundgesamtheiten von Lebenden hervorgehen. Alle diese Sterbenswahrscheinlichkeiten sind *wesentlich* verschieden.

2. Die Sterbenswahrscheinlichkeiten zerfallen in drei Gruppen und zwar die Sterbenswahrscheinlichkeiten Gleichaltriger, Gleichzeitiger und von gleicher Vertragsdauer. Jede dieser Gruppen geht von Lebenden aus, welche zwischen zwei um ein Jahr auseinander

stehenden a) Geburtszeiten und Eintrittszeiten b) Geburtszeiten und Eintrittsaltern c) Eintrittszeiten und Eintrittsaltern liegen und im Falle a) überdies noch durch eine Linie der Eintrittsalter begrenzt sein können, indem die Individuen entweder d) dem niedrigeren oder e) dem höheren der beiden möglichen Alter angehören.

3. Die Sterbenswahrscheinlichkeiten, welche aus Grundgesamtheiten von Lebenden hervorgehen, sind in Rücksicht aller möglichen sechs Bestimmungsstücke in dem Sinne eindeutig, als die zur Verwendung gelangenden Lebenden- und Totengesamtheiten keinerlei Bestimmungsstücke mit Alters- oder Zeitunterschieden aufweisen, welche die Grenzen eines Jahres überschreiten. Unter den Sterbenswahrscheinlichkeiten, welche aus Hauptgesamtheiten hervorgehen, sind rücksichtlich des Eintrittsalters sechs, rücksichtlich Austrittsalter und Vertragsdauer vier eindeutig. Die größte Genauigkeit *in den relativen Bestimmungsstücken* wird daher bei Verwendung von Grundgesamtheiten, die mindeste Genauigkeit durch die Sterbenswahrscheinlichkeiten mit englischen Hauptgesamtheiten von Lebenden oder mit den Gothaischen und Deutschen Hauptgesamtheiten 4 und 7 erreicht.

4. Wenn unter den Bestimmungsstücken die Geburtszeit, die Eintrittszeit, die Austrittsszeit und das Eintrittsalter als unmittelbar gegeben, die übrigen Bestimmungsstücke als abgeleitet erachtet werden können, dann erfordern die 5 Sterbenswahrscheinlichkeiten gleichzeitig Beobachteter den geringsten Arbeitsaufwand.

§ 15. Die Gesamtheiten und Sterbenswahrscheinlichkeiten Versicherter für eine herrschende Absterbeordnung. Falls man annimmt, daß sich die Sterbenswahrscheinlichkeiten mit der *Geburtszeit* nicht ändern, daß also auch deren Werte unabhängig von der *Beobachtungszeit* und der *Zeit* des Beitrittes zur Versicherungsgesellschaft sind, dann werden für die Bildung der Gesamtheiten alle absoluten Bestimmungsstücke sohin a_1, a_2, a_3 wertlos. Die Gesamtheiten erscheinen dann nur durch das Beitrittsalter a_{12}, das Beobachtungsalter a_{13} und die Versicherungsdauer a_{23} definiert.

Behandelt man zunächst die Lebendengesamtheiten, so eignen sich von den relativen Bestimmungsstücken nur zwei, a_{13} und a_{23}, als Träger, während die beiden anderen Bestimmungsstücke als Grenzen dienen. Die Zahl der Lebendengesamtheiten ist demnach auf 2 reduziert und zwar:

die *deutsche Lebendengesamtheit*, das ist die Lebendengesamtheit mit dem Träger a_{13} und den Begrenzungen a_{12} und a_{23}, ferner

die *Gothaer Gesamtheit*, das ist die Lebendengesamtheit mit dem Träger a_{23} und den Begrenzungen a_{12} und a_{13}.

Die deutsche Lebendengesamtheit ist somit die Gesamtheit der Personen gleichen Alters, welche rücksichtlich Eintrittszeit und Vertragsdauer; und die Gothaer Gesamtheit die Gesamtheit der Personen gleicher Vertragsdauer, welche rücksichtlich des Beitrittsalters und des Beobachtungsalters innerhalb der Grenzen eines Jahres liegen.

Zu diesen Gesamtheiten, welche aus dem gewonnenen Schema der dreimächtigen Gesamtheiten allein übrig bleiben, hat man eine *dritte* gefügt, indem man die Beobachtungszeit als Träger beibehielt, jedoch als solchen, um die Konsequenzen aus der Willkürlichkeit dieses Bestimmungsstückes bei der Annahme der herrschenden Absterbeordnung nicht aufgeben zu müssen, einen *bestimmten Stichtag* (den 31. Dezember) *irgend eines Kalenderjahres* festsetzte. Zu demselben können *drei* Kombinationen von Grenzen treten. Man bezeichnet als

englische Gesamtheit die Lebendengesamtheit, welche am 31. Dezember irgend eines Kalenderjahres besteht und sich entweder rücksichtlich

a) der Versicherungsdauer und des Alters oder
b) der Versicherungsdauer und des Eintrittsalters,
c) des Alters und des Eintrittsalters

um ein Jahr unterscheidet. Es ist ohne weiteres ersichtlich, daß die Begrenzungen der Gesamtheiten rücksichtlich der Definitionsmerkmale um ein Jahr, rücksichtlich des restierenden Merkmales um zwei Jahre auseinander gehen.

Beispielsweise wird, um diese Behauptung an der Modalität a zu exemplifizieren, eine Person, die am 31. Dezember 1900 im 20. Versicherungsjahr und 50. Lebensjahr steht, zwischen dem 1. Januar 1850 und dem 31. Dezember 1850 geboren und zwischen dem ersten Januar 1880 und dem 31. Dezember 1880 eingetreten sein und sich sohin im Beitrittsalter 29 bis 31 befinden.

Von den abgeleiteten Lebendengesamtheiten schließt man sofort auf die brauchbaren Totengesamtheiten und Sterbenswahrscheinlichkeiten einer herrschenden Absterbeordnung und zwar gibt es *fünf* brauchbare Totengesamtheiten Versicherter und *fünf* verschiedene Sterblichkeitsmaße, von welchen jedoch drei (die drei englischen) zu einem und demselben Träger gehören:

die *deutsche* Sterbenswahrscheinlichkeit ist die Sterbenswahrscheinlichkeit *Gleichaltriger*;

die *Gothaer* Sterbenswahrscheinlichkeit die Sterbenswahrscheinlichkeit *gleicher Vertragsdauer*;

die *englischen*[1]) Sterbenswahrscheinlichkeiten sind die Sterbenswahrscheinlichkeiten *des gleichen Stichtages* irgend eines Kalenderjahres.

Die Darstellung der Gesamtheiten und sohin die Berechnung der Sterbenswahrscheinlichkeiten einer herrschenden Absterbeordnung erfolgt immer nach dem gleichen bezw. in den Überschriften teilweise modifizierten Formular. Nachstehend wird das Formular zur Konstatierung der deutschen Gesamtheiten wiedergegeben.

Formular VI.

Eintrittsalter $a - 1$ bis a.

Alter beim Ausscheiden aus der Beobachtung	Ausgeschieden durch Tod	Ausgeschieden durch Vollendung des Zähltages	Ausgeschieden auf sonstige Art	in Summe	Summen der Zahlen der Kol. 5 von unten	Sterbenswahrscheinlichkeiten
1	2	3	4	5	6	7

Die Gesamtheiten der Lebenden enthält Kol. 6, die der Toten Kol. 2.[2])

Das Formular wird zum Gothaer Schema, wenn die Individuen

1) Aus den obigen Erwägungen geht hervor, daß die Verschiedenheit der Definitionsmerkmale bei den deutschen und Gothaer Gesamtheiten immer innerhalb der Grenzen *eines* Jahres; bei den englischen Lebendengesamtheiten rücksichtlich eines Definitionsmerkmales innerhalb der Grenzen zweier Jahre; bei den englischen Totengesamtheiten in dem Falle, als dieses Definitionsmerkmal die Versicherungsdauer oder das Alter ist, sogar innerhalb der Grenzen dreier Jahre zu liegen kommt. Man hat daher die englischen Gesamtheiten bezw. auch das englische Sterblichkeitsmaß als das theoretisch mindest einwandfreie bezeichnet (Theodor Roghé).

2) Das obige Schema wird auf Grund der zum Verständnisse des Formulars I gebrachten Bildes ohne weiteres klar. Die durch den Querschnitt einer Röhre tretende Flüssigkeitsmenge *kann auch aus dem nach diesem Querschnitt erfolgenden Abfluß gemessen werden.* Tritt demnach bei einem Teilstück der Röhre $x+1$ die Flüssigkeitsmenge a_{x+1}, allgemein bei einem Teilstück des Rohres $x+i$ die Menge a_{x+i} aus, so fließt durch den Querschnitt beim Teilstücke a_x die Menge

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_{x+i},$$

wenn n der letzte Ausfluß ist.

Im obigen Schema sind die Querschnitte mit den Altern, die Flüssigkeitsmengen mit den Lebenden zu vergleichen.

vom Alter $a - \frac{1}{2}$ bis $a + \frac{1}{2}$ als Gleichaltrige vom Alter a zusammengefaßt und die Austrittsfälle nach der Vertragsdauer geordnet werden. In solchem Falle ist das Formular überschrieben: „Eintrittsalter $a - \frac{1}{2}$ bis $a + \frac{1}{2}$“, die Kolonne 1 mit „Vertragsdauer“. Das Schema wird endlich zum englischen Formular, wenn die Überschrift: „Eintrittsalter $a - 1$ bis a am 31. Dezember“ und die erste Kolonne „Vertragsdauer“ lautet.

Bei den Vorbereitungen des Materiales zur Ausfüllung des Formulars VI sind vielfache zeitraubende Manipulationen nötig. Zur Ermittlung der deutschen Sterbenswahrscheinlichkeiten müssen beispielsweise für jeden Versicherten das Eintrittsalter, Austrittsalter und die Versicherungsdauer nach Jahren, Monaten und Tagen genau gerechnet werden. Man kann solche Weitläufigkeit ersparen, wenn man die Gesamtheiten nach dem Schema der Abhängigkeit von der Geburtszeit (also dem Schema für die dreimächtigen Gesamtheiten) behandelt.

Für die Konstatierung der deutschen Sterbenswahrscheinlichkeiten bedient man sich passend des folgenden Schemas:

Formular VII.

Beitrittsalter n.

Kalenderjahr der Geburt	Kalenderjahr des Eintrittes	Kalenderjahr des Austrittes $a+n+\delta$ mit nach dem Kalendertag der Geburt		$a+n+\delta+1$ mit vor dem Kalendertag der Geburt		$a+n+\delta+1$ mit nach dem Kalendertag der Geburt		$a+n+\delta+2$ mit vor dem Kalendertag des Austrittes		$a+n+\delta+2$ mit nach dem Kalendertag des Austrittes	
		ε	τ	ε	τ	ε	τ	ε	τ	ε	τ
a	$a+n$										
	$a+\overline{n+1}$										
$a+1$	$a+n+1$										
	$a+\overline{n+2}$										

Die Ausfüllung des Formulars erfordert die nachstehenden Operationen:

a) Man schreibt den Geburtstag, Eintrittstag und Austrittstag jedes Versicherten auf je ein Blatt (fishe).

b) Man zerlegt die Fishes in zwei Gruppen (Hauptgruppen), je nachdem der Kalendertag der Geburt vor oder nach dem Kalendertag des Austrittes fällt.

c) Man ordnet die Karten innerhalb jeder der beiden Hauptgruppen nach Eintrittsjahren und jede der gewonnenen neuen Gruppen nach Geburtsjahren mit dem Eintrittstage vor oder nach dem Geburtstage (im Schema mit $a + \overline{n+k}$ und $a + n + k$ bezeichnet).

d) Vor Eintragung der nun vollendeten Gesamtheiten verschiebt man die horizontale Kolonne $a+n+\delta$, $a+n+\delta+1$, $a+n+\delta+2$, ..., welche auf einem beweglichen Streifen aufgetragen sein muß, so lange, bis die äußerste Eintragung des Streifens auf der linken Seite $a+n+\delta$ mit dem Kalenderjahre des Eintrittes jeder einzutragenden Gesamtheit korrespondiert. Die in jeder Vertikalkolonne einzusetzenden Zahlen kommen den jeweilig beobachteten Gesamtheiten und zwar die unter ε stehenden Zahlen den bei Lebzeiten, die unter τ stehenden Zahlen den wegen Todesfall ausgeschiedenen Personen gleich.

e) Auf ein und demselben Zählformular stehen sodann die sämtlichen im Alter n Eingetretenen, und zwar in der ersten bis vierten Kolonne die vor Erreichung des Alters $n+1$; in der fünften bis achten Kolonne die vor Erreichung des Alters $n+2$; in der neunten bis zwölften Kolonne die vor Erreichung des Alters $n+3$ ausgetretenen Personen usf.

f) Die Summen der Vertikalkolonnen werden sodann in ein Formular übertragen, das dem Formular VI vollständig bis auf den Umstand gleicht, daß die Kol. 3 und 4 zusammengefaßt sind.

Ähnliche, noch weit leichter zu handhabende Formulare kann man für die Gothaer und englische Gesamtheit entwickeln.

§ 16. Die Wanderungen. Die Beziehungen zwischen den Lebenden- und Totengesamtheiten erleiden eine gewisse Abänderung durch den Umstand, daß die Bevölkerung bezw. der Versicherungsstock während der ganzen Beobachtungszeit durch Einwanderungen bezw. Eintretende vermehrt, durch Auswanderungen bezw. Austretende bei Lebzeiten vermindert wird. Eine leichte Überlegung ergibt allgemein den Satz, daß die Differenz der Lebenden am Anfang und Ende der Beobachtungsperiode der Anzahl der in der Periode Verstorbenen vermehrt um die Ausgewanderten und vermindert um die Eingewanderten gleich ist. Wird die Differenz zwischen Ein- und Auswanderung als Inkrement bezeichnet, dann folgt daraus der Umkehrungssatz: Die Gesamtheit der Toten einer bestimmten Beobachtungsperiode ist der Differenz zwischen den Lebenden zu Beginn und am Ende der Beobachtungsperiode, vermehrt um das Inkrement der Wanderungen, gleich. Die Gleichungen IV, V und VI erleiden hierdurch die nachstehende Änderung:

$$M^{t_1\ t_2}_{n_1\ n_2} = V^{t_1\ t_2}_{n_1} - V^{t_1\ t_2}_{n_2} + J^{t_1\ t_2}_{n_1\ n_2}; \qquad (\mathrm{IV}_1)$$

$$M^{t_1\ t_2}_{\tau_1\ \tau_2} = V^{t_1\ t_2}_{\tau_1} - V^{t_1\ t_2}_{\tau_2} + J^{t_1\ t_2}_{\tau_1\ \tau_2}; \qquad (\mathrm{V}_1)$$

$$M^{\tau_1\ \tau_2}_{n_1\ n_2} = V^{n_1\ n_2}_{\tau_1} + V^{\tau_1\ \tau_2}_{n_1} - V^{\tau_1\ \tau_2}_{n_2} - V^{n_1\ n_2}_{\tau_2} + J^{\tau_1\ \tau_2}_{n_1\ n_2}. \qquad (\mathrm{VI}_1)$$

Hierin sind die J als Zeichen für die Inkremente gebraucht und ganz in Analogie der Totengesamtheiten mit Indizes versehen. Für die beiden Grundgesamtheiten erhält man analog:

$$ {}_{\tau}G_n^t = V_{\tau}^{n,t} - V_n^{\tau,t} + {}_{\tau}J_n^t ; \qquad (\text{VIII}_1') $$

$$ {}_nG_{\tau}^t = V_n^{t,\tau} - V_{\tau}^{t,n} + {}_nJ_{\tau}^t . \qquad (\text{VIII}_2') $$

Die eben entwickelten Sätze lassen sich ohne Schwierigkeiten auf die Beziehungen der Lebenden- und Totengesamtheiten ausgelesener Leben, wenn diese durch die Ein- und Austretenden irritiert werden, übertragen.[1])

§ 17. Die Bildung von Gesamtheiten nach Registermethoden. Gesamtheiten, welche nur von der *Beobachtungszeit* und einer weiteren kontinuierlichen Ursache abhängen, kann man zur fortlaufenden Darstellung bringen, wenn man die Gesamtheiten für einen *bestimmten Zeitpunkt* konstatiert und dann die Änderungen in denselben Jahr für Jahr *registriert*. Die Methode wird ebensowohl bei den *Sterblichkeits-* als *Invaliditäts*messungen, wie für zahlreiche andere Fälle verwendet. Die wesentliche Vorbedingung für den richtigen Gebrauch der Methode ist die genaue Aufzeichnung aller Veränderungen.

Als Beispiele für die Methode werden angeführt:

I. Das statistische Formular 7 der auf Grund des § 35 des österreichischen Versicherungsregulatives herausgegebenen Formulariensammlung für private Lebensversicherungsunternehmungen zur Evidenthaltung der Versicherungsstände.

Die einzelnen Gesamtheiten bestehen in den Verträgen und Versicherungssummen für die verschiedenen *Modalitäten* des Zuganges und Abganges. Solcher gibt es: a) Zugang auf Grundlage von Anträgen, b) Zugang durch Reaktivierung, c) Abgang durch Tod, d) Abgang durch anderweitigen Ablauf der Versicherung, e) Abgang durch Reduktion, f) Abgang vor Ablauf der Versicherung. Das hierzu gehörige Schema lautet:

Formular VIII.

Art der Versicherung	Versicherungen zu Beginn des Jahres in Kraft	Zugang		Abgang				Versicherungen am Ende des Jahres in Kraft
		auf Grundlage von Anträgen	durch Reaktivierung	durch Tod	durch anderweitigen Ablauf	durch Reduktion	vor Ablauf des Vertrages	
	V_x	Za	R	T	A	Rd	St	V_{x+1}

1) Becker hat die Repräsentation der Wanderungen in seinen Darstellungen der Gesamtheiten durch Linien vorgeschlagen, welche außerhalb der Beobachtungszeit strichuliert, innerhalb derselben ausgezogen sind.

Als Arten der Versicherung werden in der ersten Vertikalkolonne unterschieden: α) Kapitalversicherungen auf den Ablebensfall, β) gemischte Kapitalversicherungen, γ) Kapitalversicherungen auf den Erlebensfall, δ) Unmittelbare Leibrenten, ε) Aufgeschobene Leibrenten, ξ) Invaliditätsrenten, η) Überlebensrenten.

Das Schema ist die Darstellung des Satzes:

$$V_{x+1} = V_x + Za + R - (T + A + St + Rd).$$

Hierher zählt auch das statistische Formular 11 derselben Formulariensammlung zur Evidenthaltung der Prämienreserven der Lebensversicherungsunternehmungen.

II. Die statistischen Formularien von Behm und Zimmermann zur Beobachtung der Invaliditätswahrscheinlichkeiten bezw. der sie bestimmenden Gesamtheiten aus den Beobachtungen des Vereines deutscher Eisenbahnverwaltungen, sowie die analogen Formularien für die Beobachtungen des österreichischen Ministeriums des Innern an den Bergarbeitern. Eine Gruppe von aktiven Personen eines bestimmten Alters x zu Beginn des Jahres (A_x) kann sich im Laufe des Jahres durch den Hinzutritt und den Austritt von aktiven Personen (E_x bezw. S_x), die vorkommenden Todesfälle und Invaliditätsfälle (T_x bezw. J_x) aus demselben Alter ändern. Es besteht somit

$$A_{x+1} = A_x + E_x - (S_x + T_x + J_x),$$

und das Schema lautet:

Formular IX.

Kalenderjahr ....

Alter	Aktive zu Beginn des Jahres	Eintretende im Laufe des Jahres	Austritt durch			Aktive am Ende des Jahres
			Ausscheiden	Tod	Invalidität	
	A_x	E_x	S_x	T_x	J_x	A_{x+1}

Die Aufstellung der Registergesamtheiten erfordert in der Regel keine besondere Operation des Statistikers, sondern ergibt sich fast immer als Nebenprodukt bei Evidenthaltung der Bevölkerung bezw. des Versicherungsstockes; dieser Umstand war dafür entscheidend, daß man sie nur allzuhäufig zur Erforschung aller möglichen statistischen Beziehungen und insbesondere auch dann verwendete, wenn eine Gesamtheit von mehr als zwei kontinuierlichen Ursachen abhängt. Der letztere Fall führte nicht selten zu Trugschlüssen und war sodann selbstverständlich auch hinderlich für die Entwicklung der Wissenschaft.

Ein Beispiel hierfür bietet die Beobachtung der Invaliditätswahrscheinlichkeiten und der Sterbenswahrscheinlichkeiten Invalider. Dieselben hängen ebenso von der Dienstdauer bezw. der Zeit nach erfolgter Invalidisierung, der Dauer der Invalidität, als vom Alter ab. Die Forschung auf Grundlage der Registergesamtheiten hat, weil darin die Beobachtungen nur nach Altern zerlegt waren, die Feststellung der Abhängigkeit von den ersteren Ursachen durch mehr als 20 Jahre behindert.

Schließlich wird bemerkt, daß jene Bestimmungsmethoden für die Gesamtheiten, welche nach Listen oder Zählkarten erfolgen, *Individualmethoden*, welche nach Registern oder durch Volkszählungen erfolgen, *Summarmethoden* genannt werden.

Zweiter Abschnitt.

Die Arten der statistischen Maßzahlen und ihre Ermittlung.[1])

§ 18. Die intensiven statistischen Maßzahlen. Den Ausführungen des ersten Abschnittes ist zu entnehmen, daß durch die intensiven statistischen Maßzahlen der Einfluß der einzelnen Ursachen auf die biologischen Erscheinungen bestimmt wird. Die bekannteste intensive Maßzahl ist die statistische Wahrscheinlichkeit. Dieselbe ist ein Bruch, in dessen Nenner die Anzahl der Individuen einer bestimmten Art (des Anfangszustandes), in dessen Zähler die Summe der daraus binnen der Zeiteinheit unter dem Einflusse der zu messenden Ursache hervorgegangenen Änderungen (des Endzustandes) sich befindet.

Die Wahrscheinlichkeit gibt als Maßzahl einer *diskontinuierlichen* Ursache zu keinerlei Bemerkung Anlaß, indem sie immer als präziser Ausdruck für den Einfluß der letzteren aufgefaßt werden kann. Bezüglich der *kontinuierlichen* Ursachen ist hervorzuheben, daß deren Einfluß auf die Erscheinung aus doppeltem Grunde durch eine Wahrscheinlichkeit nicht vollständig festgestellt werden kann. Einerseits ändert sich nämlich die Stärke der Ursache innerhalb der Zeiteinheit, während die Wahrscheinlichkeit aus der Summe der Änderungen ein

1) Vorbemerkungen. Im Sinne der Aufgaben der mathematischen Statistik erscheint es zwar hinreichend, wenn an dieser Stelle die einzelnen statistischen Maßzahlen (also die einfachen und zusammengesetzten Maßzahlen) definiert würden und — soweit die Zurückführung auf die Gesamtheiten nicht erfolgen kann — ihr Zusammenhang mit den anderweitigen statistischen Maßzahlen zur Erörterung käme. In Ergänzung der diesbezüglichen Ausführungen folgt jedoch in diesem Buche noch eine Darstellung der sämtlichen Maßzahlen der Statistik, welche im Versicherungswesen dermalen gebraucht werden, also der betreffenden Mortalitäts-, Invaliditäts-, Krankheits- und Heiratstabellen. Auf solche Art war es möglich, die Entwicklungsgeschichte der Wissenschaft einigermaßen zur Darstellung zu bringen, andererseits aber auch den Bedürfnissen der Praxis, welche die Kenntnis und Beurteilung aller in Verwendung stehenden Maße fordert, gerecht zu werden.

einziges Resultat ableitet; andererseits wirkt die Ursache innerhalb der Zeiteinheit auf eine sich stets ändernde Menge von Individuen ein.

Je nachdem nun statt der Wahrscheinlichkeit in obigem Sinne die Änderung der Einheit der Beobachtungsfälle in jedem Augenblick der Zeiteinheit, oder zwar für die ganze Zeiteinheit, jedoch mit Berücksichtigung der Zahl der in jedem Augenblicke vorhandenen Anzahl von Individuen oder endlich die Summe der Ergebnisse ermittelt wird, wenn die Ursache mit der in jedem Augenblick vorhandenen Stärke immer auf je eine Einheit von Individuen wirkt, spricht man von *Kraft, Koeffizient* oder *unabhängiger Wahrscheinlichkeit.*

Praktisch sind alle diese verschiedenen Maßzahlen in der Sterblichkeitstheorie verwendet worden und sie sollen demnach zunächst auch für diese erörtert werden.

1. Die *Sterblichkeitskraft* (Sterbeintensität, force of mortality, taux de mortalité instantané) ist ein Bruch, in dessen Zähler das Verhältnis der in unendlich kleiner Zeitstrecke beobachteten Änderung und jener unendlich kleinen Zeitstrecke, in dessen Nenner die Gesamtheit sich befindet, aus welcher die Änderung hervorgeht. Bezeichnet l_x die Lebenden des Alters x, dann ist die Sterblichkeitskraft:

$$-\frac{1}{l_x}\frac{dl_x}{dx}.$$

Unter Benützung der Gleichung IIa des I. Abschnittes kann man auch die Beziehung zwischen Sterbenswahrscheinlichkeit und Sterblichkeitskraft herstellen. Es ist nämlich

$$\mu_x = -\frac{1}{l_x}\frac{dl_x}{dx} = -\frac{1}{l_x}\left(\Delta u_x - \frac{1}{2}\Delta^2 u_x + \frac{1}{3}\Delta^3 u_x \cdots\right), \qquad \text{(I)}$$

und wenn man sich in dieser Entwicklung mit den Zahlen von der Kleinheit der ersten bezw. zweiten oder dritten Differenzen begnügt:

$$\mu_x = w_x; \quad \mu_x = \frac{3w_x - w'_{x+1}}{2}; \quad \mu_x = \frac{11w_x - 7w'_{x+1} + 2w''_{x+2}}{6}$$

usf. Hierin bedeutet allgemein w^k_{x+k} die Wahrscheinlichkeit des x-jährigen, im Alter $x+k$ zu sterben.

Beispielsweise ergeben sich für die Absterbeordnung AF der vier französischen Gesellschaften die folgenden numerischen Beziehungen:

Alter	Lebende	die Sterbenswahrscheinlichkeit	die Sterblichkeitskraft
40	711324	0,00975	0,00959
41	704386	0,01019	0,01001
42	697210	0,01066	0,01047
43	689777	0,01118	0,01091
44	682067	0,01174	0,01152

Die Sterbenswahrscheinlichkeiten sind im allgemeinen größer als die Sterblichkeitskräfte; kleiner nur dann, wenn, wie in den jüngsten und höchsten Altern, die Zahlen der Todesfälle mit wachsendem Alter abnehmen. Um die Sterbenswahrscheinlichkeit durch die Sterblichkeitskraft berechnen zu können, entwickelt man zunächst nach der Taylorschen Reihe:

$$l_{x+1} = l_x + \frac{1}{1!}\frac{dl_x}{dx} + \frac{1}{2!}\frac{d^2 l_x}{dx^2} + \cdots$$

Setzt man im dritten Gliede der Entwicklung für $\frac{dl_x}{dx} = \Delta l_x$ ein und vernachlässigt die Reihe vom vierten Gliede ab, so erhält man

$$l_{x+1} = l_x + \frac{dl_x}{dx} + \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\Delta l_x$$

oder auch

$$\Delta l_x = \frac{dl_x}{dx} + \frac{1}{2}\Delta\frac{dl_x}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{dl_{x+1}}{d(x+1)} + \frac{dl_x}{dx}\right)$$

und endlich, wenn man beiderseits durch l_x dividiert:

$$w_x = \frac{1}{2}\left[(1 - w_x)\,\mu_{x+1} + \mu_x\right],$$

d. i. endlich

$$w_x = \frac{\mu_x + \mu_{x+1}}{2 + \mu_{x+1}}.$$

2. Die Berücksichtigung der Zahl der jeweils im Maße beobachteten Individuen erfolgt im Sterblichkeitskoeffizienten. Derselbe ist ein Bruch, in dessen Nenner die von Lebenden eines bestimmten Alters in der Zeiteinheit verbrachte Zeit, in dessen Zähler die aus diesen Lebenden in der Zeiteinheit hervorgegangenen Toten stehen. Er ist demnach

$$q_1 = \frac{t_x}{\int_0^1 l_{x+t}\,dt}. \qquad \text{(Ia)}$$

Nimmt man beispielsweise an, daß die Zahlen der Lebenden zu Beginn und am Ende einer Beobachtungsperiode linear in einander übergehen, dann kann man für $l_{x+t} = l_x - t\,(l_x - l_{x+1})$, sohin für $\int_0^1 l_{x+t}\,dt = l_x - \frac{l_x - l_{x+1}}{2}$ setzen und bekommt

$$q_1 = \frac{t_x}{l_x - \frac{l_x - l_{x+1}}{2}} = \frac{w_x}{1 - \frac{w_x}{2}}.$$

Der in § 9 als Sterblichkeitskoeffizient durch die III. Hauptgesamtheit der Toten definierte Ausdruck ist demnach lediglich ein Näherungswert.

3. Die Berücksichtigung beider Störungen (der Änderung der kontinuierlichen Ursache und der Gesamtheit der Beobachtungen innerhalb der Beobachtungszeit) erfolgt durch die unabhängige Wahrscheinlichkeit. Dieselbe ist die Gesamtheit der Änderungen, welche an der Wahrscheinlichkeit während der Zeiteinheit beobachtet werden müßte, wenn die in den unendlich kleinen Zeitteilchen beobachteten Änderungen jeweils auf die zu Beginn dieser Zeitteilchen bestehende Gesamtheit bezogen würden, sohin:

$$\gamma_x = \int_0^1 \frac{dl_{x+t}}{l_{x+t}} = -\int_0^1 \frac{d \log l_{x+t}}{dt}\, dt = \int_0^1 \mu_{x+t}\, dt = -\log(1 - w_x). \qquad \text{(Ib)}$$

Hiermit ist gleichzeitig der Zusammenhang der unabhängigen mit den (abhängigen) Sterbenswahrscheinlichkeiten gegeben. Es ist nämlich

$$\gamma_x = -\log(1 - w_x)$$

oder

$$1 - w_x = e^{-\gamma_x},$$

woraus sich die Reihenentwicklungen

$$\gamma_x = w_x + \frac{w_x^2}{2} + \frac{w_x^3}{3} + \cdots \quad \text{und} \quad w_x = \gamma_x - \frac{\gamma_x^2}{2!} + \frac{\gamma_x^3}{3!} - \cdots$$

sowie endlich die Näherungsformeln

$$\gamma_x = \frac{w_x}{1 - \frac{w_x}{2}} \quad \text{und} \quad w_x = \frac{\gamma_x}{1 + \frac{\gamma_x}{2}}$$

ergeben.

Die unabhängige Sterbenswahrscheinlichkeit ist sonach das Integral der Sterblichkeitskraft und unter den oben benützten Voraussetzungen für die Näherungsformeln mit dem Sterblichkeitskoeffizienten identisch. Auch der Sterblichkeitskoeffizient ist im allgemeinen größer als die Sterbenswahrscheinlichkeit.

Aus den Erörterungen dieses Paragraphen kann gefolgert werden, daß sich die drei eben behandelten Maße stets auf die Sterbenswahrscheinlichkeiten, allgemein die auf irgend welche biologischen Erscheinungen bezügliche Kraft, der Koeffizient oder die unabhängige Wahrscheinlichkeit auf die entsprechende (abhängige) Wahrscheinlichkeit zurückführen läßt. Es soll demnach in Zukunft auch nur mehr von dieser gehandelt werden.

Die zu den verschiedenen biologischen Erscheinungen gehörigen Wahrscheinlichkeiten kann man nach einem doppelten Gesichtspunkte einteilen. Je nach der Anzahl der sie bestimmenden Ursachen wird man von *Wahrscheinlichkeiten einer, zweier oder mehrerer Veränderlichen* sprechen. Je nach der *Zahl der Qualitäten*, in welche eine Grundgesamtheit durch Wahrscheinlichkeiten abgeändert wird, gehören sie den *einändrigen, zweiändrigen* oder *mehrändrigen* Systemen an. Die Gesamtheit von Lebenden wird durch das einändrige System der Sterbenswahrscheinlichkeiten in Lebende und Tote, die Gesamtheit von Aktiven durch das zweiändrige System der Sterbenswahrscheinlichkeiten Aktiver und der Invaliditätswahrscheinlichkeiten in aktiv Sterbende und Invalide, die Gesamtheit Gestorbener durch das vieländrige System der Wahrscheinlichkeiten einer bestimmten Todesursache in die Toten der verschiedenen Todesursachen überführt.

Schon aus der Definition ergibt sich, *daß die Summe der einem mehrändrigen System angehörenden Wahrscheinlichkeiten die Wahrscheinlichkeit, sich nicht zu ändern, auf die Einheit ergänzen müsse.*

So ist in den erwähnten Beispielen und zwar für die Sterbens- und Lebenswahrscheinlichkeit:

$$\frac{l_{x+1}}{l_x} + \frac{t_x}{l_x} = 1,$$

wenn l_x die Lebenden, t_x die Toten des Alters x bedeuten; für die Aktivitäts-, Invaliditäts- und Sterbenswahrscheinlichkeit:

$$\frac{A_{x+1}}{A_x} + \frac{J_x}{A_x} + \frac{S_x}{A_x} = 1,$$

wenn A_x die Aktiven, J_x die Invalidisierungsfälle und S_x die Sterbefälle in Aktivität des Alters x bezeichnen; endlich für die Sterbenswahrscheinlichkeit nach verschiedenen Todesursachen:

$$\frac{t_x^1}{t_x} + \frac{t_x^2}{t_x} + \frac{t_x^3}{t_x} + \cdots + \frac{t_x^n}{t_x} = 1,$$

wenn t_x^ϱ die Toten der Krankheit ϱ und t_x die Summe der Gestorbenen bedeuten.

Die einem System angehörenden mehrändrigen Wahrscheinlichkeiten sind insofern voneinander abhängig, als nach dem eben abgeleiteten Satze die Änderung einer Wahrscheinlichkeit die der anderen nach sich ziehen muß. Im *Karup-Küttner*schen Satze wird nachgewiesen, *daß sich jedes n-ändrige System abhängiger Wahrscheinlichkeiten in n einändrige, von einander unabhängige Wahrscheinlichkeiten dadurch transformieren läßt, daß man behufs Herleitung irgend*

einer der Wahrscheinlichkeiten die Änderungen nach den anderen Wahrscheinlichkeiten durch Nichtänderungen ersetzt.

Der erwähnte Satz wird, wie folgt, bewiesen: Bezeichnet A_x die Zahl der Individuen einer Grundgesamtheit des Alters x, dV_x^1, dV_x^2, dV_x^3, ... dV_x^n die Änderungen in die Qualitäten V_x^1, V_x^2, V_x^3, ... V_x^n während der sehr kleinen Altersstrecke x bis $x + dx$, dann besteht die Beziehung

$$A_x = A_{x+dx} + dV_x^1 + dV_x^2 + dV_x^3 + \cdots + dV_x^n$$

oder auch

$$-\frac{dA_x}{A_x} = \frac{1}{A_x}(dV_x^1 + dV_x^2 + \cdots + dV_x^n). \qquad \text{(II)}$$

Irgend eines der Glieder der rechten Seite der Gleichung, etwa $\frac{dV_x^\varrho}{A_x, dx} \cdot dx$ bedeutet die unendlich geringe Abänderung der Einheit der Individuen der Grundqualität in die Qualität V_x^ϱ; bezeichnet man dieselbe mit $\mu_x^\varrho dx$, so erhält man, wenn man zwischen x_0 und x_1 integriert und schließlich für $e^{-\int_{x_0}^{x_1} \mu_x^\varrho dx} = 1 - \gamma_x^\varrho$ setzt:

$$\log \frac{A_{x_1}}{A_{x_0}} = -\sum_1^n{}^\varrho \int_{x_0}^{x_1} \mu_x^\varrho dx$$

und

$$\frac{A_{x_1}}{A_{x_0}} = \prod^{\varrho=1..n} e^{-\int_{x_0}^{x_1} \mu_x^\varrho dx} = \prod^{\varrho=1...n} (1 - \gamma_x^\varrho).^1) \qquad \text{(IIa)}$$

Zur Bestimmung der einzelnen Integralwerte kann man, wenn x_1 und x_0 um 1 abweicht, in erster Näherung von den Beziehungen $A_x = A_{x_0} - t(V_x^1 + V_x^2 + \cdots + V_x^n)$ und $dV_x^\varrho = V_x^\varrho dt$ Gebrauch machen und erhält

$$\int_0^1 \frac{V_x^\varrho dt}{A_{x_0} - t(V_x^1 + V_x^2 + \cdots V_x^n)} = \frac{V_x^\varrho}{A_{x_0}} \int_0^1 \frac{dt}{1 - t\dfrac{V_x^1 + \ldots + V_x^n}{A_{x_0}}}$$

$$= -\frac{V_x^\varrho}{V_x^1 + V_x^2 + \ldots + V_x^n} \log\left(1 - \frac{V_x^1 + \ldots + V_x^n}{A_{x_0}}\right)$$

Jeder Faktor unter dem Produkte, beispielsweise $1 - \gamma_x^\varrho$, ist sohin

---

[1]) Das Zeichen Σ bedeutet eine Summe, das Zeichen Π ein Produkt.

$$1 - \gamma_x^{\varrho} = \left(1 - \frac{V_x^1 + \ldots + V_x^n}{A_{x_0}}\right)^{\frac{V_x^{\varrho}}{V_x^1 + \ldots + V_x^n}}.$$

Hieraus erhält man nach einigen leichten Transformationen, wenn man für $V_x^1 + V_x^2 + \cdots + V_x^n = N$ einsetzt und in dem Binom auf der rechten Seite der Gleichung nach Potenzen von $\frac{N_x}{A_{x_0}}$ bis zu den Gliedern zweiter Ordnung der Kleinheit entwickelt:

$$\gamma_x^{\varrho} = \frac{V_x^{\varrho}}{A_{x_0}}\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{V_x^{\varrho} - N}{A_{x_0}}\right) = \frac{V_x^{\varrho} : A_{x_0}}{1 - \frac{1}{2}\,\frac{N - V_x^{\varrho}}{A_{x_0}}}. \qquad \text{(II b)}$$

Beim Vergleich mit Formel IV des § 20 erkennt man, daß γ_x^{ϱ} einer Wahrscheinlichkeit gleich kommt, welche sich aus A_{x_0} ursprünglichen Beobachtungen bei V_x^{ϱ} Änderungen und $N - V_x^{\varrho}$ Austritten aus der Beobachtung ergibt.

Gemäß der Gleichung IIa ist nun die Wahrscheinlichkeit, daß unter der Einwirkung des n-ändrigen Systems eine Änderung an der Grundqualität nicht erfolgt, dem Produkt von n neuen Wahrscheinlichkeiten gleich, deren jede nur von einer Ursache abhängt. Nach der Gleichung IIb aber ist das Komplement jeder dieser Wahrscheinlichkeiten der Wahrscheinlichkeit für den Eintritt dieser Ursache gleich, wenn angenommen wird, daß die Abänderung nach jeder anderen Qualität als Austritt aus der Beobachtung aufgefaßt, demnach durch eine Nichtänderung ersetzt wird. Für das zweiändrige System des Ausscheidens aus einer Gruppe Aktiver ergibt sich

$$1 - \frac{J_x + S_x}{A_x} = \left(1 - \frac{J_x}{A_x - \frac{S_x}{2}}\right) \cdot \left(1 - \frac{S_x}{A_x - \frac{J_x}{2}}\right),$$

eine Beziehung, welche, wie man sich durch Ausführung der angedeuteten Operationen überzeugen kann, bis auf Größen dritter Ordnung der Kleinheit genau ist.

Nach den Beobachtungen des Vereins Deutscher Eisenbahnverwaltungen über das Nichtfahrpersonal 1877 85 betrug im Alter 40 die

Zahl der Aktiven,	Invalidisierungen,	Todesfälle	Sterbenswahrscheinlichkeit abhängige	unabhängige	Invaliditätswahrscheinlichkeit abhängige	unabhängige
61265	199	584	0,00325	0,00327	0,00953	0,00955

Nach den bisherigen Erörterungen lassen sich alle intensiven statistischen Maßzahlen auf Wahrscheinlichkeiten eines einändrigen

Systems zurückführen. Die mehrändrigen Systeme erfordern demnach keine besondere Erörterung.

§ 19. Die extensiven statistischen Maßzahlen. Die bekannteste extensive Maßzahl ist das *arithmetische Mittel*. Dasselbe ist die auf die statistische *Einheit* entfallende *Eigenschaft* und kann nur von *meßbaren Werten* gebildet werden. Bezeichnet a_1 die Größe einer Qualität des ersten, a_2 die des zweiten, . . . a_n die des n^{ten} Individuums, dann ist die Größe der mittleren Qualität $m = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$.

Das arithmetische Mittel hat zwei ausgezeichnete Eigenschaften. Es ist nämlich die Summe der positiven Abweichungen vom Mittelwerte gleich der Summe der negativen Abweichungen und ferner die Quadratsumme der Abweichungen vom Mittelwerte ein Minimum. Beide Sätze folgen unmittelbar aus der Definition. Aus obiger Mittelwertsgleichung ergibt sich nämlich

$$(a_1 - m) + (a_2 - m) + \ldots + (a_n - m) = 0.$$

Die letztere Gleichung aber kann hinwiederum als Bedingungsgleichung für die Forderung

$$(a_1 - m)^2 + (a_2 - m)^2 + \cdots + (a_n - m)^2 = \text{Min.}$$

aufgefaßt werden.

Mit dieser Bedingungsgleichung wird der Erscheinung von vornherein eine bestimmte Qualität unterlegt. Die Gleichung wird nämlich bei Feststellung ein- und desselben bloß wahrscheinlichen Wertes im Wege vielfacher Beobachtung immer dann zutreffen, wenn die Abweichungen im Einzelversuche durch den Einfluß zahlloser, sehr kleiner und voneinander unabhängiger, auf das Ergebnis in positivem und negativem Sinne gleich leicht einwirkenden Ursachen (der Elementarfehler) verursacht werden oder wenn zumindest die Fehlergröße der Versuche dem daraus resultierenden (Gaußschen Fehler-)Gesetze unterliegt.

Man begegnet in der Statistik neben dem arithmetischen Mittel häufig genug noch anderen Mitteln. Die bekanntesten sind das *geometrische*, *harmonische* und *antiharmonische* Mittel. Dieselben sind durch die Beziehungen und zwar das geometrische Mittel durch

$$m = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n},$$

das harmonische Mittel durch

$$m = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

und das antiharmonische Mittel durch

$$m = \frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$$

charakterisiert.

Alle diese Mittel haben miteinander und mit dem arithmetischen Mittel eine Eigenschaft gemeinsam. Sie werden nämlich erfüllt, wenn die Quadratsumme der Differenzen bestimmter Funktionen der beobachteten und der Mittelwerte ein Minimum wird.

Das geometrische Mittel ist die Bedingung für

$$\sum (\log a_i - \log m)^2 = \text{Min.},$$

das harmonische Mittel die Bedingung für

$$\sum \left(\frac{1}{a_i} - \frac{1}{m} \right)^2 = \text{Min.},$$

endlich das antiharmonische Mittel die Bedingung für

$$\sum a_i (a_i - m)^2 = \text{Min.}$$

Aus dieser letzteren Erkenntnis folgt genau so, wie für das arithmetische Mittel, daß die Anwendbarkeit irgend eines dieser Mittel eine bestimmte Form für das Gesetz der Abweichungen zur Voraussetzung hat.

In der Statistik taucht nicht selten die Frage auf, welches der erwähnten Mittel zur Darstellung einer Erscheinung am tauglichsten sei. Gemäß obigen Erörterungen können hierüber niemals Argumente a priori, sondern nur immer Versuche entscheiden, welche das den Abweichungen zugrunde liegende Fehlergesetz feststellen. Wesentlich für die Beurteilung des Gebrauches der verschiedenen Mittel sind die beiden folgenden Sätze:

1. Die oben unterschiedenen Mittel nehmen für Abweichungen von der ersten Ordnung der Kleinheit den gleichen Wert an.

Aus der Grundeigenschaft des geometrischen und harmonischen Mittels

$$\Sigma (f(M) - f(a_i))^2 = \text{Min.}$$

folgt nämlich

$$f(M) = \frac{[f(a_i)]}{n},$$

wenn statt des Summenzeichens die eckige Klammer gesetzt wird. Ist das arithmetische Mittel von den einzelnen a nur immer um sehr kleine Größen unterschieden und besteht insbesondere $a_i = m + \varepsilon_i$, dann ist bis auf Größen von der dritten Ordnung der Kleinheit

$$f(a_i) = f(m) + \varepsilon_i f'(m) + \frac{\varepsilon_i^2}{2} f''(m)$$

und

$$f(M) = f(m) + \frac{[\varepsilon_i^2]}{2n} f''(m),$$

woraus man für M selbst

$$M = m + \frac{[\varepsilon_i^2]}{2n} \frac{f'''(m)}{f'(m)}$$

ableiten kann.

Für das antiharmonische Mittel findet man unmittelbar und exakt

$$M = m + \frac{[\varepsilon_i^2]}{nm}.$$

2. Für große Unterschiede in den beobachteten Werten nehmen auch die Mittel weit abweichende Werte an. Rücksichtlich der Reihenfolge, in welcher die verschiedenen Mittel zu liegen kommen, ist für die Mittel von zwei Elementen leicht einzusehen, daß das antiharmonische Mittel am größten ist, das arithmetische Mittel sodann folgt, das geometrische Mittel unter dem arithmetischen und das harmonische Mittel unter dem geometrischen liegt. Die Differenz zwischen dem antiharmonischen und arithmetischen Mittel zweier Größen a_1 und a_2 ist nämlich

$$\frac{a_1^2 + a_2^2}{a_1 + a_2} - \frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{(a_1 - a_2)^2}{2(a_1 + a_2)},$$

die zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel

$$\frac{a_1 + a_2}{2} - \sqrt{a_1 a_2} = \frac{(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2}{2};$$

die zwischen dem geometrischen und harmonischen Mittel endlich

$$\sqrt{a_1 a_2} - \frac{2a_1 a_2}{a_1 + a_2} = \sqrt{a_1 a_2} \frac{(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2}{a_1 + a_2},$$

also in jedem Falle eine positive Größe.

Beispielsweise ist zwischen den Größen 1 und 99 das antiharmonische Mittel 98,02, das arithmetische Mittel 50, das geometrische Mittel 9,95, das harmonische Mittel 1,98.

Diese Beziehung gilt aber auch ganz allgemein für n Beobachtungen bei sehr kleinen Abweichungen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$. Zur Bildung von M muß im Sinne der obigen Ableitungen zu m beim antiharmonischen Mittel das Zusatzglied $+\frac{[\varepsilon_i^2]}{nm}$, beim geometrischen Mittel $-\frac{[\varepsilon_i^2]}{2n \cdot m}$, endlich beim harmonischen Mittel $-\frac{[\varepsilon_i^2]}{nm}$ treten.

Außer den Mittelwerten werden als Maßzahlen in der Statistik noch der *Zentralwert* und der *dichteste Wert* verwendet. Unter dem Zentralwerte versteht man jene Qualität, welche ebensoviele Individuen höherer als niederer Qualität neben sich besitzt. Der *dichteste* Wert ist das Individuum jener Qualität, welches die größte Zahl von Individuen nahezu gleicher Qualität aufweist.

Auch die beiden eben genannten Werte haben gewisse ausgezeichnete Eigenschaften.

Beim *Zentralwerte* ist die Zahl der positiven und negativen Abweichungen von diesem gleich groß und die Summe der positiven und negativen Abweichungen von ihm, nach absolutem Werte gemessen, kleiner als von jedem anderen Werte. Der erstere Satz ist mit der Definition identisch, den letzteren kann man, wie folgt, erweisen:

Ist der Zentralwert x, so ist die Bedingungsgleichung für das erwähnte Minimum

$$\frac{d}{dx}[(a_1 - x) + (a_2 - x) + \cdots + (a_k - x) + (x - a_{k+1}) + (x - a_{k+2}) + \cdots (x - a_n)] = \text{Minimum},$$

woraus für k folgt

$$-k + (n - k) = 0 \text{ oder } k = \frac{n}{2}.$$

Der Zentralwert ist der wahrscheinlichste Wert für eine Eigenschaft.

Der dichteste Wert ist die weitaus wichtigste Maßzahl der extensiven Massenerscheinungen, doch läßt er sich fast niemals unmittelbar den Beobachtungszahlen selbst entnehmen. Dieselben geben nämlich immer die Summe aller Individuen, welche innerhalb gewisser *Spatien* des Grundmaßes liegen, niemals die Individuen, welche *zu jedem* Werte des Grundmaßes gehören. So ergibt eine Tabelle über die Rekrutenmaße von 2047 zwanzigjährigen Leipziger Studenten aus den zwanzig Jahrgängen 1843 — 1862 (Fechner, Kollektivmaßlehre usw.)

Zoll	71,25	71,50	71,75	72,—	72,25
Anzahl	75	81	89	79	81

und hat die Bedeutung, daß beispielsweise 75 Individuen eine Höhe von 71,25 — 71,50 Zoll hatten.

Zur Bestimmung des dichtesten Wertes wird man zweckmäßig interpolieren, indem man etwa durch drei Nachbarpunkte eine Parabel legt und für diese das Maximum sucht. Eine Parabel, die durch das scheinbare Maximum z_0, den unmittelbar vorausgehenden

und folgenden Wert z_{-1} und z_1 in den Werten -1, 0 und 1 geht, hat die Gleichung

$$\xi = z_0 + x\,\frac{z_1 - z_{-1}}{2} + x^2\,\frac{z_1 + z_{-1} - 2z_0}{2}$$

und ein Maximum im Abstande x vom Nullpunkte, wobei

$$x = \frac{z_1 - z_{-1}}{2[2z_0 - (z_1 + z_{-1})]}.$$

Im obigen Beispiele ist das wahre Maximum 0,11 Bruchteile des Abstandes der einzelnen Werte vom scheinbaren Maximum entfernt und sohin 71,72″.

Unter den erwähnten Maßzahlen haben das arithmetische Mittel, der Zentralwert und dichteste Wert in der Sterblichkeitsmessung eine bestimmte Bedeutung gewonnen. Das arithmetische Mittel der verschiedenen Lebenslängen einer Generation nennt man die *mittlere Lebensdauer;* den Zentralwert die *wahrscheinliche Lebensdauer*; den dichtesten Wert das *Normalalter.* Über das Normalalter wird später gehandelt werden; über die mittlere Lebensdauer werden die folgenden Andeutungen genügen.

Die mittlere Lebensdauer des Alters x ist nach der Definition

$$M = [x(l_x - l_{x+1}) + \overline{x+1}(l_{x+1} - l_{x+2}) + \overline{x+2}(l_{x+2} - l_{x+3}) + \cdots] : l_x$$
$$= (xl_x + \sum_{x+1}^{\infty} l_i) : l_x = x + \sum_{x+1}^{\infty} l_i : l_x,$$

wenn l_x, l_{x+1}, l_{x+2} die Lebenden der zugehörigen Alter bezeichnen.

Wenn alle möglichen Altersintervalle berücksichtigt werden, ist sie auch

$$M = -\frac{1}{l_x}\int_x^{\infty} t\,dl_t = x + \frac{1}{l_x}\int_x^{\infty} l_t\,dt.$$

Im Sinne der Ausdrücke auf den rechten Seiten der Gleichungen ist die mittlere Lebensdauer die Zeit, welche ein Individuum eines bestimmten Alters noch zu verleben hat.

Anmerkung. Den letzten Ausdruck kann man in verschiedenster Art näherungsweise auswerten. Zerlegt man das Gesamtintegral in Teilintegrale nach den einzelnen Altern, dann erhält man zunächst:

$$M = \frac{1}{l_x}\left[\int_x^{x+1} l_t\,dt + \int_{x+1}^{x+2} l_t\,dt + \int_{x+2}^{x+3} l_t\,dt + \cdots + \int_{w-1}^{w} l_t\,dt\right].$$

Macht man beispielsweise innerhalb jedes Teilintegrales von der Beziehung

$$l_t = l_r + (t - r)(l_{r+1} - l_r)$$

Gebrauch, so erhält man

$$M_x = \tfrac{1}{2} + \frac{\sum_{x+1}^{w} l_i}{l_x}.$$

Bei der Anwendung der Simpsonschen Näherungsformel:

$$M_x = \tfrac{1}{3} + \frac{4(l_{x+1} + l_{x+3} + \cdots) + 2(l_{x+2} + l_{x+4} + \cdots)}{3 l_x}.$$

Über den Unterschied der Maßzahlen orientiert die folgende Tabelle:

Absterbeordnung	mittlere Lebensdauer	wahrscheinliche Lebensdauer	Normalalter
	in Jahren		
Deutsche Sterbetaf. 1871/81 Männer	35,58	38,—	70,—
„ „ „ Frauen	38,45	42,—	72,—
Preußische „ Männer	35.38	37,—	69,—
„ „ Frauen	37,99	41,—	71,—
Englische „ Männer	41,35	47,—	71,—
„ „ Frauen	44,62	52,—	73,—
Französische „ Männer	40,83	46,—	?
„ „ Frauen	45,30	51,—	?
Schwedische „ Männer	43,42	54,—	75,—
„ „ Frauen	48,60	59,—	76,—

Nach Fechner (Kollektivmaßlehre) werden noch mehrere andere Maßzahlen der extensiven Massenerscheinungen unterschieden: der *Scheidewert* als Wert der Ursache, welcher gleiche Summen der Qualitäten zu seinen beiden Seiten ergibt; der *schwerste Wert*, welcher das Produkt der Qualität und der Häufigkeit des Vorkommens und endlich der *Abweichungsschwerwert*, welcher das Produkt der Abweichung einer Qualität von einer ausgezeichneten Qualität (dem Mittelwerte, Zentralwerte oder Normalwerte) mit der Häufigkeit des Vorkommens der ersteren Qualität zu einem Maximum macht.

Bezeichnet beispielsweise t_i die Toten und l_i die Lebenden des Alters i, dann ist für den *Scheidewert* der Lebenslänge

$$\sum_{0}^{x} i t_i = \sum_{x+1}^{\infty} i t_i,$$

woraus sich

$$\sum_{1}^{x} l_i - 2x l_{x+1} = \sum_{x+1}^{\infty} l_i$$

oder

$$2\sum_{1}^{x} l_i - 2x l_{x+1} = \sum_{1}^{\infty} l_i$$

oder endlich

$$\sum_1^x (l_i - l_{x+1}) = \tfrac{1}{2} \sum_1^\infty l_i$$

ergibt.

Die Gleichung ist mit Hilfe von Tabellen über die Werte $\sum_1^x (l_i - l_{x+1})$ leicht lösbar.

Für den *schwersten* Wert der Lebenslänge besteht die Ungleichung

$$(x-1)t_{x-1} < x t_x > (x+1)\, t_{x+1}$$

und nach Substitution der l_x statt t_x und einigen einfachen Transformationen

$$x(l_{x-1} - 2l_x + l_{x+1}) - (l_{x-1} - l_x) < o > (x+1)(l_{x+2} - 2l_{x+1} + l_x) - (l_x - l_{x+1})$$

oder

$$x \Delta^2 l_{x-1} + \Delta l_{x-1} < o > \overline{x+1}\, \Delta^2 l_x + \Delta l_x,$$

woraus sich für x selbst

$$x = -\frac{\Delta l_{x-1}}{\Delta^2 l_{x-1}} = \frac{t_{x-1}}{\Delta t_{x-1}}$$

ergibt.

Für den *Abweichungsschwerwert* muß endlich, wenn man die Qualität des Hauptwertes mit x_o bezeichnet, die Beziehung

$$(x - 1 - x_o)t_{x-1} < (x - x_o)t_x > (x + 1 - x_o)t_{x+1}$$

erfüllt sein, woraus in analoger Art, wie für den schwersten Wert

$$(x + 1 - x_o)\Delta^2 l_x + \Delta l_x > o < (x - x_o)\Delta^2 l_{x-1} + \Delta l_{x-1}$$

oder endlich

$$x - x_o = -\frac{\Delta l_{x-1}}{\Delta^2 l_{x-1}} = \frac{t_{x-1}}{\Delta t_{x-1}}$$

folgt.

Übrigens haben diese letzteren Größen bisher nur selten Verwendung in der Praxis gefunden.

§ 20. Die intensiven statistischen Maßzahlen und die Wanderungen (die Ein- und Austretenden in geschlossenen Gesellschaften). Die Erscheinung der Wanderung nimmt auf die Begriffsbestimmung der Maßzahl einen wesentlichen Einfluß. Weil nämlich die Wanderung selbst die Qualität des Beobachteten nicht ungeändert läßt (die Sterbenswahrscheinlichkeit ist im zurückbleibenden Teile der Bevölkerung unter sonst gleichen Umständen von der im wandernden Teile zweifellos verschieden), so werden auch die Maßzahlen andere sein müssen, je nachdem die letzteren die Erscheinung in der

„ursprünglich vorhandenen“ Masse oder in der „beobachteten“ Masse festhalten sollen. Die erstere Maßzahl zu erforschen, ist überhaupt ausgeschlossen, weil sodann die Ausgewanderten nach Austritt aus dem Beobachtungsgebiet in Evidenz gehalten werden müßten. Aber auch die Maßzahl für die „beobachtete“ Masse kann nur mit Hilfe von Hypothesen über den Verlauf und den Einfluß der Wanderungen auf die durch sie abgeänderten Gesamtheiten ermittelt werden.

Dies vorausgeschickt, soll dargelegt werden, wie die Feststellung der Maßzahlen unter der Annahme der Wanderungen im Gebiete der Sterblichkeitsmessung gelingt.

Die Ein- und Austretenden im Beobachtungsgebiete bezw. die Ein- und Austretenden einer Versicherungsgesellschaft beeinflussen die Resultate der Sterbenswahrscheinlichkeit in doppeltem Sinne. Einerseits treten gewisse Personen in das Beobachtungsgebiet ein und tragen sohin zu den Todesfällen bei, ohne daß sie sich unter der anfänglich zugrunde liegenden Gesamtheit der Lebenden befinden, andererseits werden einige zu Beginn der Beobachtungszeit vorhandene Personen nach ihrem Austritte aus dem Beobachtungsgebiete sterben und sohin nicht gezählt werden. Um den Einfluß der störenden Ursachen kennen zu lernen, wird angenommen, daß Ein- und Austritt sowie das Ableben kontinuierlich vor sich geht. Bezeichnet $\varphi(x+t)dt$ die Anzahl der im Alter $x+t$ bis zur Altersstrecke $x+t+dt$ Eintretenden, $\psi(x+t)dt$ die in derselben Altersstrecke Austretenden, endlich l_x die Lebenden des Alters x, dann werden $\frac{\varphi(x+t)dt\,l_{x+1}}{l_{x+t}}$ die von diesen Eingetretenen, $\frac{\psi(x+t)dt\,l_{x+1}}{l_{x+t}}$ die von diesen Ausgetretenen im Alter $x+1$ noch vorhandenen Personen sein und es werden sich im Alter $x+1$ überhaupt noch Personen unter Beobachtung finden

$$V_{x+1} = V_x \frac{l_{x+1}}{l_x} + \int_0^1 \frac{\varphi(x+t)l_{x+1}}{l_{x+t}}\,dt - \int_0^1 \frac{\psi(x+t)l_{x+1}}{l_{x+t}}\,dt. \qquad \text{(III)}$$

Die Möglichkeit der Lösung dieser Gleichung hängt von der Kenntnis der Funktion $\varphi(x+t)$ und $\psi(x+t)$, sowie vom Verlaufe der Absterbeordnung ab. Hierüber kann man jedoch der Erfahrung bloß entnehmen, daß $\int_0^1 \varphi(x+t)dt = E$, einer gewissen Summe von

Eingetretenen und $\int_0^1 \psi(x+t)dt = A$, einer gewissen Summe von Ausgetretenen gleichkommt. Weitergehende Aufschlüsse sind nur auf hypothetischem Wege möglich.

a) Wittstein hat vorausgesetzt, daß innerhalb der Altersstrecke von einem Jahre Ein- und Austritt, wie das Sterben, gleichmäßig vor sich geht, daß also

$$\varphi(x+t)dt = edt,\ \psi(x+t)dt = adt \text{ und } l_{x+t} = l_x - (l_x - l_{x+1})t$$

ist und e und a Konstante sind. Dann folgt zunächst wegen

$$\int_0^1 edt = E \text{ und } \int_0^1 adt = A \text{ für } e = E \text{ und } a = A$$

und aus der Gleichung (III)

$$V_{x+1} = V_x(1-w_x) + (1-w_x)\int_0^1 \frac{(E-A)dt}{1-tw_x}$$
$$= V_x(1-w_x) - \frac{1-w_x}{w_x}(E-A)\log(1-w_x).$$

Wird endlich für die linke Seite die selbstverständliche Beziehung

$$V_{x+1} = V_x + E - A - T \qquad \text{(III')}$$

eingesetzt, so erhält man

$$E - A - T = -V_x w_x - \frac{1-w_x}{w_x}(E-A)\log(1-w_x)$$

und hieraus

$$w_x = \frac{T}{V_x + \frac{1}{w_x}(E-A)\left[1 + \frac{1-w_x}{w_x}\lg(1-w_x)\right]} = \frac{T}{V_x + (E-A)\left(\frac{1}{2} + \frac{w_x}{2\cdot 3} + \frac{w_x^2}{3\cdot 4} + \cdots\right)}$$

und in erster Näherung

$$w_x = \frac{T}{V_x + \frac{E-A}{2}}. \qquad \text{(IV)}$$

Daraus ergibt sich der Satz: *In einer Gesellschaft von Ein- und Austretenden hat man anzunehmen, daß jeder Ein- oder Austretende durchschnittlich ein halbes Jahr in Beobachtung stand.*

b) Zeuner hat angenommen, daß die Zahl der Ein- und Austretenden jeweils proportional den Lebenden der Absterbeordnung sei und daß demnach stattfinden müsse:

$$\varphi(x+t) = el_{x+t}dt, \quad \psi(x+t) = al_{x+t}dt.$$

Mit Hilfe dessen folgt zunächst aus der Gleichung (III)

$$V_{x+1} = V_x\frac{l_{x+1}}{l_x} + l_{x+1}(e-a), \qquad \text{(III'')}$$

und aus den Bestimmungsgleichungen für E und A die Beziehungen $e = \frac{2E}{l_x + l_{x+1}}$ und $a = \frac{2A}{l_x + l_{x+1}}$. Setzt man in der letzten Gleichung (III″) für V_{x+1} seinen Wert in V_x, E, A und T und substituiert die Ausdrücke für e und a, so erhält man nach einigen Transformationen

$$V_x\left(1 - \frac{l_{x+1}}{l_x}\right) + (E - A)\frac{l_x - l_{x+1}}{l_x + l_{x+1}} = T$$

und hieraus

$$w_x = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{T}{V_x + (E - A)\frac{l_x}{l_x + l_{x+1}}}, \qquad \text{(IV′)}$$

welcher Wert nahezu mit dem Ausdruck in IV übereinstimmt.

Heym gelangte zur selben Beziehung auf vollständig anderem Wege. Er ging von der selbstverständlichen Annahme aus, daß — sofern auch die Absolutzahlen in der offenen d. h. sich durch Ein- und Austritte ändernden Gesellschaft von denen der geschlossenen Gesellschaft variieren — doch die Relativzahlen gleich sein müßten. Bezeichnet man die Absolutzahlen der Lebenden einer geschlossenen Gesellschaft mit l_x, die einer offenen Gesellschaft mit λ_x, dann besteht

$$-\frac{dl_x}{l_x} = -\frac{d\lambda_x}{\lambda_x}.$$

Wird nun weiter vorausgesetzt, daß sowohl der Abgang durch Tod, als bei Lebzeiten in der offenen Gesellschaft sich proportional der verflossenen Zeit vollziehe, also $-d\lambda_x = T dx$ und

$$\lambda_x = \lambda_{x_0} + (E - A - T)x$$

sei, dann erhält man:

$$-\frac{dl_x}{l_x} = \frac{T dx}{\lambda_{x_0} + (E - A - T)x}$$

und bei Integration zwischen $x = 0$ und $x = 1$ auf beiden Seiten der Gleichung:

$$\log \frac{l_{x_1}}{l_{x_0}} = -\frac{T}{E - A - T} \log\left(1 + \frac{E - A - T}{\lambda_{x_0}}\right)$$

oder

$$\frac{l_{x_1}}{l_{x_0}} = \left(1 - \frac{A + T - E}{\lambda_{x_0}}\right)^{\frac{T}{A+T-E}}.$$

Hieraus folgt wieder, wenn für $\frac{l_{x_1}}{l_{x_0}} = 1 - w_x$ gesetzt und das Binom auf der rechten Seite der Gleichung bis auf Glieder 3. Ordnung der Kleinheit entwickelt wird, die mit (IV) übereinstimmende Gleichung

$$w_x = \frac{T}{\lambda_{x_0}}\left(1 + \frac{A - E}{2\lambda_{x_0}}\right). \qquad \text{(IV}''\text{)}$$

Der auf dreifache Art abgeleitete Zusammenhang zwischen den Sterbenswahrscheinlichkeiten und den Gesamtheiten der Lebenden, Verstorbenen und Gewanderten führt sowohl in der Bevölkerungsstatistik, wie in der Statistik der Versicherungsgesellschaften zu mehreren überaus bemerkenswerten Theoremen und Formularien.

In der Bevölkerungsstatistik sind die Wanderungen je nach der Wahl der Sterbenswahrscheinlichkeiten verschieden zu berücksichtigen. Wird, wie im § 16, die Differenz zwischen den Ein- und Auswanderungen mit J bezeichnet, dann resultiert als Formel *für die Sterbenswahrscheinlichkeit gleichaltrig Lebender:*

$$w_n = \frac{M^{t_1\,t_2}_{n_1\,n_2}}{V^{t_1\,t_2}_{n_1} + \frac{1}{2}J^{t_1\,t_2}_{n_1\,n_2}},$$

oder unter Anwendung der Formel (IV_1) des Abschnittes I

$$w_n = \frac{2M^{t_1\,t_2}_{n_1\,n_2}}{V^{t_1\,t_2}_{n_1} + V^{t_1\,t_2}_{n_2} + M^{t_1\,t_2}_{n_1\,n_2}}.$$

Weil jedoch gemäß VIII_1' und VIII_3' des Abschnittes I

$$V^{t_1\,t_2}_{\tau} = V^{t_1\,t_2}_{n_2} + {}_{\tau}G^{t_2}_{n_2} - {}_{\tau}J^{t}_{n_2},$$

$$V^{t_1\,t_2}_{\tau} = V^{t_1\,t_2}_{n_1} - {}_{n_1}G^{t_1}_{\tau} + {}_{n_1}J^{t}_{\tau}$$

so ergibt sich

$$2V^{t_1,t_2}_{\tau} = V^{t_1\,t_2}_{n_1} + V^{t_1\,t_2}_{n_2} + {}_{\tau}G^{t_2}_{n_2} - {}_{n_1}G^{t_1}_{\tau},$$

und wenn man in erster Näherung ${}_{\tau}G^{t_2}_{n_2} = {}_{n_1}G^{t_1}_{\tau}$ setzt,

$$w_n = \frac{M^{t_1\,t_2}_{n_1\,n_2}}{V^{t_1,t_2}_{\tau} + \frac{1}{2}M^{t_1\,t_2}_{n_1\,n_2}},$$

sohin ein Ausdruck, welcher mit dem sub IX im Abschnitte I erhaltenen Ausdruck meritorisch identisch ist. Die *Sterbenswahrscheinlichkeit der gleichzeitig Lebenden* ergibt sich analog aus

$$w_{\tau} = \frac{M^{t_1\,t_2}_{\tau_1\,\tau_2}}{V^{t_1,t_2}_{\tau_1} + \frac{1}{2}J^{t_1\,t_2}_{\tau_1\,\tau_2}}$$

mit Hilfe der Formel (V_1) des Abschnittes I durch den Ausdruck:

$$= \frac{2M^{t_1\,t_2}_{\tau_1\,\tau_2}}{V^{t_1\,t_2}_{\tau_1} + V^{t_1\,t_2}_{\tau_2} + M^{t_1,t_2}_{\tau_1\,\tau_2}}.$$

Die Sterbenswahrscheinlichkeit gleichzeitig Lebender kann man auch aus den Hauptgesamtheiten 3. Gattung in folgender Art ableiten.

Betrachtet man die Beobachtungen in der III. Hauptgesamtheit als Beobachtungen, welche aus einer Hauptgesamtheit von Lebenden zweiter Gattung durch Hinzutritt von Lebenden erster Gattung und vorzeitigen Austritt von Lebenden erster Gattung unter gleichzeitiger tatsächlicher Wanderung hervorgehen, dann ist

$$w = \frac{M_{n_1\, n_2}^{\tau_1\, \tau_2}}{V_{\tau_1}^{n_1\, n_2} + \frac{1}{2}\left(V_{n_1}^{\tau_1\, \tau_2} - V_{n_2}^{\tau_1\, \tau_2}\right) + \frac{1}{2} J_{n_1\, n_2}^{\tau_1\, \tau_2}}.$$

Nun ist nach Formel (VI_1) des Abschnittes I

$$J_{n_1\, n_2}^{\tau_1\, \tau_2} + V_{n_1}^{\tau_1\, \tau_2} - V_{n_2}^{\tau_1\, \tau_2} = V_{\tau_2}^{n_1\, n_2} - V_{\tau_1}^{n_1\, n_2} + M_{n_1\, n_2}^{\tau_1\, \tau_2},$$

sohin wird

$$w = \frac{2\, M_{n_1\, n_2}^{\tau_1\, \tau_2}}{V_{\tau_1}^{n_1\, n_2} + V_{\tau_2}^{n_1\, n_2} + M_{n_1 / n_2}^{\tau_1 / \tau_2}}.$$

Man erhält demnach für w den bereits auf S. 41 abgeleiteten Ausdruck.

Daraus ergeben sich die folgenden Sätze:

1. *Die Formel für die Sterbenswahrscheinlichkeit Gleichaltriger sowie die Bestimmung der Sterbenswahrscheinlichkeit im Wege einer Hauptgesamtheit von Toten III. Gattung erleiden durch Berücksichtigung des Einflusses der Wanderungen keine Änderung.*

2. *Dagegen kommt die Sterbenswahrscheinlichkeit gleichzeitig Lebender dem Verhältnisse der Toten und der halben Summe der Lebenden zu Beginn und am Ende der Beobachtungsperiode, vermehrt um die Toten in dieser, gleich.*

In der Statistik der Versicherungsgesellschaften erfolgt die Behandlung der Ein- und Austretenden immer in der gleichen Art, nämlich durch tunlichste Elimination des Einflusses der Eintritte und durch Aufmachung einer Korrekturkolonne für die Austritte im Zählformulare.

Die Eintritte fallen nämlich im allgemeinen dadurch aus der Rechnung, daß von vornherein nach Gesamtheiten gleichen Eintrittsalters beobachtet und — wie in der Gothaschen und englischen Methode — der fiktive Geburtstag in den Eintrittstag verlegt wird. Nur bei der deutschen Methode, welche nach den genauen Geburtstagen rechnet, müssen die Zahlen der *ersten* Zeile und bei allen drei Methoden die Beobachtungen im Falle des Wiedereintrittes im Wiedereintrittsjahre mit der Hälfte in Rechnung gezogen werden.

Die Form, welche das Zählformular sodann annimmt, ist aus dem nachfolgenden Schema zu ersehen.[1])

Formular I.

Alter in den aufeinanderfolgenden Vertragsjahren	Wieder eingetreten	Summe der Kol. 2 von unten mit Höherstellung um 1 Zeile	Ausgeschieden aus der Beobachtung wegen			Summe der Ausgeschiedenen		Wiedereingetreten und Ausscheidungen (Summe der Kol. 2, 5 u. 6)	Halbe Kol. 9	Zahl der ganzjährigen Beobachtungen (Differenz der Kol. 8 und der Summe aus Kol. 3 u. 10)
			Todesfalls	Lösung des Vertrages	Vorhandensein am Zähltermin	vom selben Jahre	vom selben Jahre und den folgenden			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

§ 21. Die zusammengesetzten Maßzahlen. Man kann die einfachen Maßzahlen in mannigfacher Art kombinieren, um die Änderungen an der Gesamtheit bei simultaner oder sukzessiver Einwirkung mehrerer Ursachen zu beobachten. Kombinierte Maßzahlen sind beispielsweise die Wahrscheinlichkeit eines Aktiven, im Laufe des Jahres invalide zu werden und zu sterben oder invalide zu werden und zu leben; das Geschlechtsverhältnis der Geborenen und Verstorbenen; die Wahrscheinlichkeit eines Individuums bestimmten Alters, nach einer Reihe von Jahren noch zu leben oder bereits verstorben zu sein.

Die große Mehrzahl dieser Maßzahlen wird durch Rechnung aus den einfachen Maßzahlen gewonnen und ist nicht Gegenstand der mathematischen Statistik. In ihren Bereich fallen nur solche zusammengesetzte Maßzahlen, welche entweder unmittelbar beobachtet werden oder als Erscheinung eine gewisse selbständige Bedeutung gewonnen

1) Die Erklärung zu obigem Schema erfolgt in Analogie mit den Ausführungen zum Schema I des Abschnittes I bezw. in der Anmerkung zum Formular VI. Tritt nämlich in die Röhre nach dem Querschnitt auch noch Flüßigkeit ein, dann hat man vom Abfluß noch den Einfluß zu subtrahieren. Für e_{x+i} als der im Querschnitte $x+i$ eintretenden Flüßigkeitsmenge erhält man als durch den Querschnitt x tretende Menge

$$\sum_{i=1}^{i=n} (a_{x+i} - e_{x+i}).$$

Wegen der anzubringenden Korrektur wird die obige Formel

$$\sum_{i=1}^{i=n} (a_{x+i} - e_{x+i}) + \frac{a_x - e_x}{2} = \sum_{i=0}^{i=n} a_{x+i} - \left(\sum_{i=1}^{i=n} e_{x+i} + \frac{a_x + e_x}{2} \right).$$

haben: die *verschiedenen Arten der Mittelwerte*, der *Indizes* und die *Dekremententafeln*.

Die (1000fachen) *Mittelwerte der zusammengesetzten Erscheinungen* werden kurzweg als statistische Ziffern (die 100fachen Werte als Prozent) bezeichnet. Sie sind sämtlich Quotienten aller Änderungen einer bestimmten Art, welche während der Zeiteinheit aus einer inhomogenen Individuengruppe hervorgehen und der Zahl jener beobachteten Individuen. In der Praxis sind die Sterbeziffern, die Geburtenziffern, die Trauungsziffern, Verheiratungsziffern, Krankheits- und Invaliditätsziffern im Gebrauch.

Bezeichnet S die Anzahl der in einem gewissen räumlichen Gebiete innerhalb eines Jahres Gestorbenen, G die in der gleichen Zeit und im gleichen Gebiete Geborenen, T die Zahl der Trauungen, V_m die Zahl der verehelichten Männer, V_f die der Frauen, J die Zahl der Invaliditäts-, K die der Krankheitsfälle, endlich L die Zahl der zu Beginn des Jahres Lebenden, darunter M die heiratsfähigen Männer, F die heiratsfähigen Frauen, dann sind solche auf die Einheit bezogene Ziffern: $\frac{S}{L}$ (die Sterblichkeitsziffer), $\frac{G}{L}$ (die Geburtenziffer), $\frac{T}{L}$ (die Trauungsziffer), $\frac{J}{L}$ (die Invalidenziffer), $\frac{V_m}{M}$ (die Heiratsziffer für Männer), $\frac{V_f}{F}$ (die Heiratsziffer für Frauen). Nachstehende Tabelle gibt das Hundertfache solcher Ziffern beispielsweise wieder:

Land	Sterblichkeitsprozent		Geburtenprozent		Heiratsprozent	
	1874/83	1883/93	1876/80	1881/91	1876/80	1881/91
Österreich	3,06	2,88	3,88	3,80	0,774	0,774
Deutschland	2,62	2,46	2,92	3,65	0,783	0,793
England	2,05	1,92	3,54	3,13	0,767	0,751
Frankreich	2,24	2,24	2,54	2,30	0,761	0,726

Über die Verwendbarkeit der Sterblichkeitsziffern als Maßzahlen wurde bereits in § 2 gehandelt; die gleichen Bemerkungen gelten von allen übrigen Ziffern.

Besonders zu beachten ist, daß sich die statistischen Ziffern nicht als wahrscheinlichste Werte eines Grundwertes der Erscheinung auffassen lassen, wie dies für die Mittelwerte einfacher Erscheinungen möglich war; sie sind lediglich Ergebnisse eines in seinen Einzelheiten nicht dargestellten und im Wege des Mittelwertes auch nicht darstellbaren Gesetzes. Es wurde hervorgehoben, daß die Bedeutung der Sterblichkeitsziffern von Korösi durch teilweise Auflösung des ganzen Beobachtungskreises nach Altersgruppen wesentlich erhöht wurde.

Eine gleiche Auflösung ist offenbar auch für die Mittelwerte aller anderen zusammengesetzten Erscheinungen unerläßlich.

Angesichts des geringen Inhaltes, welchen die erwähnten Durchschnittsziffern besitzen, tritt noch ein weiteres Problem in Erscheinung; nämlich die Beantwortung der Frage, durch welche von mehreren auf ganz verschiedenen Wegen gewonnenen Ziffern ein und dieselbe Erscheinung am besten charakterisiert wird. So kann die Frage nach der mittleren Lebensdauer von Individuen auch näherungsweise durch die Frage nach dem mittleren Alter der Lebenden oder Gestorbenen beantwortet werden. Das erstere Maß ist durch die Beziehung $\frac{\sum_0^\omega x L_x}{\sum_0^\omega L_x}$, das letztere durch die Beziehung $\frac{\sum_0^\omega x T_x}{\sum_0^\omega T_x}$ gegeben, wenn L_x die Lebenden und T_x die Toten des Alters x bedeuten. Die erstere Maßzahl kann man gewinnen, wenn man entweder a) die aus einer Volkszählung sich ergebende Altersbesetzung der Bevölkerung oder b) die Lebenden einer Absterbeordnung gleichzeitig Lebender oder c) die Lebenden einer Generation zu Grunde legt. Im Falle a) bestimmt man das Durchschnittsalter der Bevölkerung, eine Maßzahl, welche gleich der zugrunde liegenden Altersverteilung „dem Altersaufbau" von der Absterbeordnung, der Geburtenfrequenz und den Wanderungen abhängt. Im Falle b) und c) gelangt man zu der bereits behandelten mittleren Lebensdauer.

Zu ganz analogen Erörterungen gibt das mittlere Alter der Verstorbenen Veranlassung und führt stets zu anderen Ziffern, je nachdem man bei der Berechnung von der tatsächlichen Bevölkerung oder den Ergebnissen einer Dekremententafel ausgeht.

Die *Indexzahlen* sind die Verhältniszahlen, welche sich aus gegebenen Reihen statistischer Ziffern für dieselbe Erscheinung unter Zugrundelegung einer dieser Ziffern als Maßstab ermitteln lassen. So erhält man die Indexzahlen für die Sterblichkeit in der Dekade 1890 bis 1900, wenn man die Sterblichkeitsziffern dieser Periode durch die Sterblichkeitsziffer irgend eines Beobachtungsjahres teilt. Solche Zahlenreihen leiden selbstverständlich an allen Mängeln der Grundzahlen, aus welchen sie hervorgegangen sind.[1])

1) Es ist nicht zu übersehen, daß den Indexzahlen auch wesentlich andere Bedeutungen beigelegt werden. Körösi hat beispielsweise als solche die Produkte des Prozentverhältnisses der Altersverteilung einer Standardbevölkerung innerhalb einer bestimmten Altersklasse mit der Sterblichkeitsziffer dieser Altersklasse bezeichnet.

Die *Dekremententafeln.* Unter einer Dekremententafel versteht man eine Maßzahlengruppe, aus welcher man entnimmt, wie sich eine gegebene Anzahl von Individuen eines bestimmten Alters sukzessive unter dem Einfluß einer oder mehrerer bestimmter, vom Alter abhängiger Ursachen verändert. Solche Dekremententafeln sind die Absterbeordnungen, Aktivenordnungen, Heiratsordnungen usw. Die Tafeln haben fast ausschließlich versicherungstechnische Bedeutung und werden auch nach den in dieser Wissenschaft festgestellten Regeln abgeleitet. Von großem statistischen Interesse ist die Absterbeordnung.

Dieselbe soll daher im folgenden eingehend erörtert werden.

Unter einer Absterbeordnung versteht man eine Skala, aus welcher sich ergibt, wie viele von einer beobachteten Anzahl von Lebenden eines bestimmten Alters in den aufeinander folgenden Altern noch leben. Man leitet sie aus den sukzessiven Sterbenswahrscheinlichkeiten der Alter $0, 1, 2, \ldots, n$, $w_0, w_1, w_2, \ldots, w_n$ ab, indem man deren Komplemete mit einander multipliziert. Die von G Geborenen im Alter n noch lebenden Individuen sind $G(1 - w_0)(1 - w_1)\ldots(1 - w_{n-1})$.

Im Nachfolgenden soll nun gezeigt werden, in welch verschiedener Art bisher die Absterbeordnungen konstruiert worden sind; hierbei wird sich Gelegenheit ergeben, die sämtlichen für die Geschichte der Wissenschaft oder die Praxis bedeutsameren Absterbeordnungen vorzuführen. Dieser Darstellung soll jedoch eine Einteilung der Sterblichkeitstafeln vorausgehen.

Die Absterbeordnungen zerfallen nämlich in solche der allgemeinen Bevölkerung und in solche von Versicherungsgesellschaften. Beiderlei Tafeln teilt man je nach dem Materiale, aus welchem sie gewonnen werden, ein und zwar die ersteren

1. in Absterbeordnungen einer stationären Bevölkerung als Ergebnisse aus den Totenregistern;

2. in Absterbeordnungen aus den Gesamtheiten von Verstorbenen und Geborenen;

3. in Absterbeordnungen aus den Gesamtheiten von Verstorbenen und Lebenden;

die letzteren

1. in Absterbeordnungen aus dem Materiale der Rechenschaftsberichte;

2. in Absterbeordnungen aus den Aufzeichnungen über Eintritt, Austritt und Todesfälle der Versicherten, wobei wieder zu unterscheiden ist, ob die Untersuchungen lediglich aus dem Materiale einer einzelnen oder mehrerer Versicherungsgesellschaften hervorgehen.

§ 22. Die Absterbeordnungen einer stationären Bevölkerung. Bei einer stationären Bevölkerung ist die Zahl der jährlichen Geburten gleich der Anzahl der jährlichen Todesfälle. Die erwähnte Eigenschaft kann unter den mannigfachsten Voraussetzungen eintreten. Sie wird sich immer ergeben, wenn die Reihe der Sterbenswahrscheinlichkeiten aller Alter und damit die Absterbeordnung unveränderlich bleibt (eine herrschende ist) und alle Jahre gleich viel Personen geboren werden. Bei solchen Voraussetzungen ergibt sich nämlich das folgende Verteilungsschema für die Bevölkerung nach Altern (siehe Schema II). Hierin bedeuten G die in jedem Jahre

Schema II.

Kalenderjahr der Beobachtung	Kalenderjahr der Geburt						
	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	...
K_1	G						
K_2	V_1	G					
K_3	V_2	V_1	G				
K_4	V_3	V_2	V_1	G			
K_5	V_4	V_3	V_2	V_1	G		
K_6	V_5	V_4	V_3	V_2	V_1	G	
.							
.							

Geborenen und V_1, V_2, V_3, allgemein V_k die daraus hervorgehenden Lebenden der Alter 1, 2, 3, ..., k.

Aus dem Schema kann man die folgenden Eigenschaften der stationären Bevölkerung ableiten: 1. Die Aufteilung der Bevölkerung nach Altersklassen (der Altersaufbau) ist für die Generationen und die gleichzeitig Lebenden gleich; es haben nämlich die Vertikalzeilen des Schemas (die Generationskolonnen) mit den Horizontalzeilen (den Jahrgangszeilen) den gleichen Aufbau. 2. Die Lebenden des Alters x im Kalenderjahre K_n sind immer gleich der Summe der in diesem Kalenderjahr in allen höheren Altern Sterbenden. Man erhält die letzeren als: $(V_x - V_{x+1}) + (V_{x+1} - V_{x+2}) + (V_{x+2} - V_{x+3}) + \cdots = V_x$. 3. Die Sterbenswahrscheinlichkeiten des Alters x sind dem Quotienten der Toten des Alters x in irgend einem Kalenderjahr und der Summe der Toten desselben Kalenderjahres aller höheren Alter gleich. Es ist nämlich

$$w_x = \frac{V_x - V_{x+1}}{V_x} = \frac{V_x - V_{x+1}}{(V_x - V_{x+1}) + (V_{x+1} - V_{x+2}) + \cdots}.$$

Die Richtigkeit der Gleichung ist eine unmittelbare Folgerung des Satzes sub 2. 4. Die Sterblichkeitsziffer ist der Geburtenziffer sowie dem reziproken Wert der mittleren Lebensdauer gleich. Es ist nämlich die Sterblichkeitsziffer

$$\frac{G - V_1 + (V_1 - V_2) + \cdots}{G + V_1 + V_2 + \cdots},$$

d. i., wenn man den Zähler vereinfacht,

$$= \frac{G}{G + V_1 + V_2 + \cdots}.$$

Die mittlere Lebensdauer kommt aber gleich

$$\frac{G + V_1 + V_2 + \cdots}{G}.$$

Aus diesen Sätzen hat sich die folgende Regel für die Gewinnung einer Absterbeordnung für eine stationäre Bevölkerung ergeben: Man beobachte bei den Verstorbenen eines Kalenderjahres die Todesalter, teile die gewonnenen Zahlen nach Altersklassen, schreibe die letzteren in Vertikalkolonnen an und summiere sie von unten (den Toten der höchsten Altersklasse) aufwärts. Der Quotient der Toten jeder Altersklasse in die in der Summenkolonne stehende Zahl ist deren Sterbenswahrscheinlichkeit.

Die Methode wird nach ihrem Entdecker die Halleysche genannt. Nach derselben wurden unter anderen die Absterbeordnung von Halley (1693), die von Smart (1728—1737) und deren Verbesserung von Simpson (1742), die Sterblichkeitstafel von Süßmilch (1741) und ihre Verbesserung von Baumann, die Northampton Tafel von Price, Wargentins schwedische Tafel (1766), die Tafel von Duvillard konstruiert. Im einzelnen ist hierüber anzugeben:

Halleys Tafel wurde aus den (von Caspar Neumann veröffentlichten) Totenlisten der Stadt Breslau und zwar aus den während des fünfjährigen Zeitraumes vom Jahre 1686/91 verstorbenen 5869 Personen konstruiert; die Zahl der in diesem Zeitraum Geborenen betrug 6193.

Smarts Tafel ist aus den Totenlisten der Stadt London für die Jahre 1728—1737 ermittelt worden.

Simpson korrigierte die beim Alter Null mit 1000 Lebenden beginnende Smartsche Tafel in der Art, daß er von jeder der Altersklassen bis zum 25. Jahre 140 Lebende abzog und die sodann gewonnenen Zahlen mit $\frac{426}{286}$ multiplizierte. Er hat nämlich angenommen, daß die Smartsche Tafel nach dem Alter 25 nicht mehr,

vor dem Alter 25 jedoch wegen der Zuwanderungen zu korrigieren sei. Die letzteren glaubte er nach Vergleichung der Taufhandlungen und Begräbnisse mit $^1/_3$ der im 25. Lebensjahre vorkommenden 426 Lebenden abschätzen zu sollen. Er mußte sohin die sämlichen vor dem 25. Altersjahre um diese Korrektur gekürzten Zahlen zur Herbeiführung der Kontinuität der ganzen Wertereihe entsprechend vergrößern.

Süßmilch verwendete zu seiner *„großen Sterblichkeitstafel"* die Totenzahlen von 31 Dörfern der Mark Brandenburg, die Tafel Wargentins von Schweden und die Totenzahlen von 2 kleinen und 5 großen Städten, unter welchen sich Wien, Berlin und Paris befinden. Daraus konstruierte er zunächst die Zahlen der Toten jeden Alters für jeden einzelnen Beobachtungskreis und hieraus die Sterbetafel als Summe der mittleren Totenzahlen; als mittlere Totenzahl jeden Alters aber nahm er das arithmetische Mittel der Totenzahlen der einzelnen Sterbetafeln an.

Price hat 10 Sterbetafeln konstruiert. Unter diesen gelangte die aus den 46jährigen Totenregistern der Stadt *Northampton* (1735 bis 1781) zu großer Berühmtheit. Sie erscheint gleichfalls nach der Simpsonschen Annahme über die Einwanderungen abgeleitet.

Wargentins schwedische Tafel. Wargentin berechnete auf Grundlage der Volkszahl des Jahres 1757 und der durchschnittlichen Totenzahlen der Jahre 1755—1757 Sterbetafeln für beide Geschlechter nach richtiger Methode. Dieselben sind Zusammenstellungen darüber, von wie viel Personen je eine stirbt. Knapp (Theorie des Bevölkerungswechsels) macht ihm zum Vorwurf, daß er die nach richtigen Prinzipien ermittelte Tafel von Korseboom, die Halleysche Tafel, die schwedische Tafel (nach Halleys Methode) und die Tafel für 6 schwedische Hauptmannschaften zu einer neuen Tafel kombinierte, indem er das arithmetische Mittel der Sterbeziffern auf je 1000 Personen bildete.

Duvillard. Die Duvillardsche Sterbetafel ist aus 101500 Sterbefällen der Stadt Paris abgeleitet worden und im Jahre 1806 erschienen. Duvillard war sich des Mangels seiner Tafel bewußt; es war ihm nur darum zu tun, den Einfluß der Blatternsterblichkeit auf eine Bevölkerung zu gewinnen. Er glaubte übrigens daran, daß die Tafel die Sterbeverhältnisse von Frankreich vor der Revolution ganz gut widergebe.

Im nachfolgenden werden die mittleren Lebensdauern der praktisch wichtigeren unter den genannten Tafeln für einige Alter zusammengestellt.

Die mittleren Lebensdauern im Alter n nach den Sterbetafeln von

Alter n	Halley	Süßmilch	Price Northampton-tafel	Duvillard	England neuere Untersuchungen	Deutschland
0	28,5	28,5	43,0	28,8	—	34
10	39,9	44,5	43,9	40,8	47,1	47
20	33,5	37,5	37,0	34,3	39,5	38
30	27,2	25,5	36,3	28,5	32,8	31
40	21,6	23,5	23,8	22,9	26,1	24
50	16,6	16,5	17,7	17,2	19,5	18
60	11,8	11,5	12,2	12,0	13,5	12
70	7,0	7,5	7,6	7,6	8,5	7
80	3,8	4,9	4,3	4,6	4,9	4
90	0,0	3,1	2,0	3,9	2,8	—

Die Grundlagen der Methode von Halley sind als gänzlich unberechtigt erkannt worden, weil es nirgends stationäre Bevölkerungen gibt. Vergleiche zwischen den nach Halleys Methode und korrekt ermittelten Überlebenstafeln haben oft Unterschiede von $30\,^0_0$ und mehr ergeben.

Tellkampf versuchte die Methode auf Grund der Aufzeichnungen über die Geburtenfrequenz zu korrigieren. Bezeichnet man mit G_k die im Kalenderjahre k Geborenen, T_ϱ^k die im selben Kalenderjahre, jedoch im Alter ϱ Verstorbenen und nennt den Quotienten $G_k : G_{k-i} = p_i$, dann besteht unter der Voraussetzung einer herrschenden Absterbeordnung

$$\frac{G_k}{G_{k-i}} = \frac{T_\varrho^{k+\varrho}}{T_\varrho^{k+\varrho-i}} = p_i .$$

Nun kann man die Geborenen des Kalenderjahres k, welche in den Kalenderjahren k, $k+1$, $k+2$, …, $k+n$ und zwar im Alter 0, 1, 2, …, n sterben, durch

$$G_k = T_0^k + T_1^{k+1} + T_2^{k+2} + \cdots + T_w^{k+w}$$

und mit zu Hilfenahme der vorletzten Gleichung auch durch

$$G_k = T_0^k + p_1 T_1^k + p_2 T_2^k + \cdots + p_n T_n^k + p_{n+1} T_{n+1}^k + \cdots + p_w T_w^k$$

ausdrücken. Ebenso ergeben sich die Überlebenden des Alters n aus der Generation des Geburtsjahres k nach der Gleichung

$$L_n = p_n T_n^k + p_{n+1} T_{n+1}^k + \cdots + p_w T_w^k .$$

Als Sterbenswahrscheinlichkeit folgt sohin:

$$\frac{p_n T_n^k}{p_n T_n^k + p_{n+1} T_{n+1}^k + \cdots} = w_n . \qquad (V)$$

Auf Grund dieser Gleichung läßt sich die Frage beantworten, wie sich die Sterbenswahrscheinlichkeiten nach Halley zu den korri-

gierten Sterbenswahrscheinlichkeiten verhalten. Es ist der Unterschied beider, wenn die entsprechende Halleysche Sterbenswahrscheinlichkeit mit w'_n bezeichnet wird,

$$\delta = w'_n - w_n = \frac{T^k_{n+1}(p_{n+1} - p_n) + T^k_{n+2}(p_{n+2} - p_n) + \cdots}{p_n T^k_n + p_{n+1} T^k_{n+1} + \cdots} \cdot w'_n. \quad \text{(VI)}$$

Im Zähler des Bruches sind die sämtlichen Differenzen Null, wenn $p_n = p_{n+1} = p_{n+2} = \cdots$; sie sind positiv, wenn die p_{n+1}, $p_{n+2}, \ldots > p_n$, sie sind negativ, wenn die $p_{n+1}, p_{n+2}, \ldots < p_n$. Ob das eine oder andere statt hat, hängt davon ab, ob die n^{te} Geburtenziffer kleiner oder größer als die folgenden Geburtenziffern sind, d. h. ob die Bevölkerungszahl dem n^{ten} Jahre gegenüber im Wachsen oder in der Abnahme begriffen ist; die für alle *Alter entwickelten Halleyschen Sterbenswahrscheinlichkeiten werden größer, gleich oder kleiner als die korrekt ermittelten Sterbenswahrscheinlichkeiten sein, falls die Bevölkerung überhaupt in Zunahme, in Beharrung oder Abnahme begriffen ist.*

Die Gleichung VI kann auf einfachste Art zur Korrektur der Sterbenswahrscheinlichkeiten im Wege der Eulerschen Hypothese benützt werden. Der letztere hat angenommen, daß die Geburtenziffern in geometrischer Progression wachsen, wenn die Zeit in arithmetischer Progression zunimmt.

Ist allgemein $p_n = q^n$, dann ergibt sich für w_n:

$$w_n = \frac{T^k_n}{T^k_n + q\,T^k_{n+1} + q^2\,T^k_{n+2} + \cdots}.$$

Wird beispielsweise angenommen, daß die Geburten eines Landes alle Jahre um $\frac{1}{2}\,{}^0/_{00}$ zunehmen (nach Jones), so lautet die letztere Formel

$$w_n = \frac{T^k_n}{T^k_n + 1{,}005\;T^k_{n+1} + 1{,}005^2\,T^k_{n+2} + 1{,}005^3\,T^k_{n+3} + \cdots}.$$

Man hat sehr häufig nach dem ziffernmäßigen Unterschied zwischen den Halleyschen Sterbenswahrscheinlichkeiten und ihrer Korrektur gefragt. Für das Alter Null läßt er sich leicht bestimmen. Beträgt t die Anzahl der im ersten Lebensjahre Gestorbenen, G die Zahl der Geborenen und T die Gesamtsumme der Verstorbenen, dann ist das Verhältnis der Sterbenswahrscheinlichkeiten $\frac{t}{T} : \frac{t}{G} = \frac{G}{T}$. Im Jahre 1849 wurden in Sachsen 82068 Geborene und 57988 Verstorbene beobachtet. Das Verhältnis der Sterbenswahrscheinlichkeiten beträgt $\frac{82068}{57988} = 1{,}42$.

Quetelet hat aus den Beobachtungen über die Sterblichkeit in Belgien (in den Bulletins de la commission centrale de Statistik) die nachstehende, auszugsweise wiedergegebene Tabelle veröffentlicht:

Alter	Lebende nach Halley	Lebende nach korrigiert	Verhältnis der Lebendenziffern	Alter	Lebende nach Halley	Lebende nach korrigiert	Verhältnis der Lebendenziffern
0	10000	10000	1,—	30	4539	5730	1,26
1	7945	8497	1,07	40	3932	5109	1,30
2	7123	7882	1,11	50	3288	4401	1,33
5	6284	7253	1,15	60	2616	3454	1,32
10	5822	6886	1,18	70	1653	2161	1,31
20	5225	6350	1,21	80	599	750	1,25

§ 23. Die Absterbeordnungen aus den Gesamtheiten der Verstorbenen und Geborenen. Die in diese Klasse fallenden Sterblichkeitstafeln sind entweder *Absterbeordnungen gleichzeitig Verstorbener* oder *Absterbeordnungen einer Generation*, je nachdem man die Toten eines Kalenderjahres nach Altern ordnet und sie mit den Geborenen der vorausgehenden Kalenderjahre zusammenstellt oder die Geborenen eines Kalenderjahres den Toten der aufeinander folgenden Kalenderjahre zuordnet.

Über den Unterschied der beiden Sterbetafeln orientieren die nachstehenden Figuren:

Geometrische Darstellung der Gesamtheiten zur Konstruktion einer Sterbetafel gleichzeitig Verstorbener

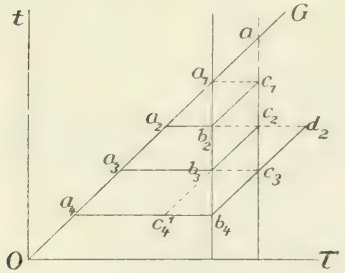


Fig. 8a.

einer Generation.

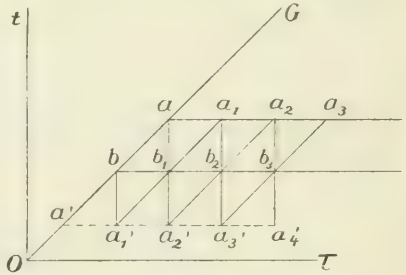


Fig. 8b.

In bezug auf die beiderlei Sterblichkeitstafeln kann man die folgenden Sätze ableiten:

1. Bei den Sterblichkeitstafeln gleichzeitig Verstorbener werden die Gesamtheiten der Verstorbenen der Fig. 8a: $aa_1c_1b_2$, $c_1b_2c_2b_3$, $c_2b_3c_3b_4$ mit den Gesamtheiten der Geborenen derselben Figur aa_1, a_1a_2, a_2a_3 usw. zusammengestellt; bei den Sterblichkeitstafeln einer Generation sind die Zählergesamtheiten die Verstorbenen der Figur 8b $aa_1'bb_1$, $a_1a_2'b_1b_2$, $a_2a_3'b_2b_3$ usw., die Nennergesamtheit ist für alle Alter die Gesamtheit der Geborenen derselben Figur aba'.

2. Die für beide Absterbeordnungen beobachteten Totengesamtheiten sind Hauptgesamtheiten III. Gattung und eignen sich daher unmittelbar nicht zur Bildung von Wahrscheinlichkeiten. Man kann aber wenigstens näherungsweise zu diesen gelangen. Bezeichnet man mit $f(x)$ die Wahrscheinlichkeit, daß ein Geborener das Alter von x Jahren erreiche und im nächsten Jahre (sohin zwischen dem Alter x und $\overline{x+1}$) sterbe, und werden beispielsweise in der ersten der obigen Figuren die aus a_2a_3 Geborenen das Alter x Erlebenden durch c_2b_3, die aus a_3a_4 Geborenen das gleiche Alter Erlebenden durch b_3c_4' repräsentiert, so ist

$$a_2a_3f(x) = c_2b_3d_2c_3 \quad \text{und} \quad a_3a_4f(x) = b_3c_4'c_3b_4.$$

Unter der Voraussetzung, daß sich die in den Hauptgesamtheiten Sterbenden gleichmäßig über die sie zusammensetzenden Elementargesamtheiten verteilen, kann man auch schreiben:

$$a_2a_3f(x) = 2\,c_2b_3c_3 \quad \text{und} \quad a_3a_4f(x) = 2\,b_3c_3b_4,$$

woraus unmittelbar als Summe sich ergibt

$$f(x)\,[a_2a_3 + a_3a_4] = 2\,[c_2b_3c_3 + b_3c_3b_4] = 2\,c_2c_3b_3b_4,$$

oder endlich

$$f(x) = c_2c_3b_3b_4 : \frac{a_2a_3 + a_3a_4}{2}.$$

Die Wahrscheinlichkeit eines Geborenen, im Alter x zu sterben, kommt demnach auch dem Quotienten einer III. Hauptgesamtheit von Verstorbenen und dem arithmetischen Mittel der Geborenen jener Kalenderjahre gleich, aus welchen die Gestorbenen hervorgehen.

3. Der obige Satz ist allerdings nur mit Hilfe der Annahme über die *gleichmäßige* Verteilung der Verstorbenen der III. Hauptgesamtheit auf die Elementargesamtheiten erhalten worden. Man kann aber genauere Werte für die obigen Wahrscheinlichkeiten unter der Voraussetzung ableiten, daß eingehendere Beobachtungen über die Geburten vorliegen. Sind dieselben beispielsweise für jeden n^{ten} Teil eines Jahres gegeben und werden die Zahlen derselben für das μ^{te} Kalenderjahr mit g_1^μ, g_2^μ, ..., g_n^μ bestimmt; bezeichnet $f(x)$ die Wahrscheinlichkeit das Alter x, $f(x+1)$ die Wahrscheinlichkeit das Alter $\overline{x+1}$ zu erreichen, wird endlich angenommen, daß die Wahrscheinlichkeit, ein zwischenliegendes Alter zu erreichen, durch geradlinige Interpolation erhalten werden könne, dann ist die

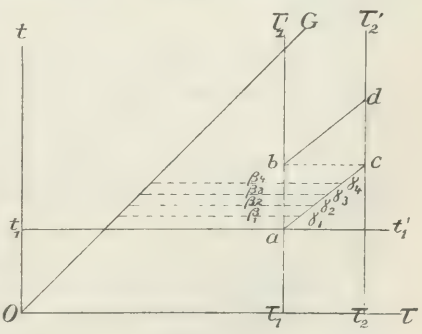


Fig. 9.

aus diesen Geburtenzahlen resultierende Hauptgesamtheit der Toten III. Gattung (siehe vorstehende Figur):

$$\begin{aligned} abcd = a\beta_1\gamma_1 + \beta_1\gamma_1\beta_2\gamma_2 + \beta_2\gamma_2\beta_3\gamma_3 + \cdots &= \frac{1}{2n}\,[g_1^{\mu}(f(x) - f(x+1)) \\ &+ 3g_2^{\mu}(f(x) - f(x+1)) + \cdots + 2\overline{n-1}\,g_n^{\mu}(f(x) - f(x+1)) \\ &+ (2n-1)\,g_1^{\mu+1}(f(x) - f(x+1)) + (2n-3)\,g_2^{\mu+1}(f(x) \\ &- f(x+1)) + \cdots + g_n^{\mu+1}(f(x) - f(x+1))] \\ &= \frac{1}{2n}(f(x) - f(x+1))\,[g_1^{\mu} + 3g_2^{\mu} + \cdots + 2\overline{n-1}\,g_n^{\mu} \\ &+ 2\overline{n-1}\,g_1^{\mu+1} + 2\overline{n-3}\,g_2^{\mu+1} + \cdots + g_n^{\mu+1}]. \end{aligned}$$

Werden endlich die Geborenen des Kalenderjahres μ im Ganzen mit G^{μ} bezeichnet, dann kann man auch schreiben

$$abcd = (f(x) - f(x+1))\Big[G^{\mu+1} - \frac{1}{2n}\cdot\sum_{i=1,2,\ldots,n}(2i-1)\,(g_i^{\mu+1} - g_i^{\mu})\Big].$$

(Vergleiche Knapps Anhaltische Methode.)

4. In den Absterbeordnungen gleichzeitig Verstorbener werden die Beobachtungen über so viele Generationen benützt, als Alter im Menschenleben vorhanden sind. Weil sich die Sterblichkeit von Generation zu Generation ändert, entspricht der Absterbeordnung kein reales Substrat.

5. Beiderlei Arten der Sterblichkeitsmessung sind nur möglich, wenn der Einfluß der Wanderungen gleich Null gesetzt oder durch irgend ein Mittel bestimmt werden kann.

Man verwendet die Methoden demnach allgemein zur Bemessung der Kindersterblichkeit; die Bestimmung des Einflusses der Wanderungen wurde durch direkte Beobachtungen dieser sowie näherungsweise durch Berücksichtigung der Militärkonskriptionen[1]) versucht.

Die Beobachtung gleichzeitig Verstorbener führt auf das Tellkampfsche Verfahren. Unter den hierher gehörigen Sterbetafeln sind anzuführen:

Tellkampf hat nach seiner Methode eine Sterblichkeitstafel für Hannover aus den Ergebnissen über die Beobachtung der Todesfälle von 1824—1843 und der Volkszählungen von 1833 und 1845 konstruiert.

Demonferrand konstruierte eine Sterbetafel für Frankreich und suchte den Einfluß der Wanderungen nach den Militärkonskriptionen während der Jahre 1812—1831 zu bestimmen.

1) Beträgt die jährliche Zunahme der Geburten 2‰, die der Militärkonskriptionen 6‰, so können die Zuwachsprozente der Bevölkerung, somit der Einfluß der Wanderungen durch entsprechende Interpolation gefunden werden.

Hermann benützte die Todesfälle Bayerns innerhalb der Jahre 1834—1851 und die Geburtenbewegung vom Jahre 1817 bis zum Jahre 1851 und erhielt hieraus eine Sterbetafel für die ersten 34 Alter.

Bortkiewicz konstruierte eine Tafel für Rußland (allg. stat. Archiv 1893), indem er die Todesfälle aus den Geburten Jahr für Jahr verfolgte und die auf solche Art erhaltenen Generationstafeln mehrerer Geburtsjahre zusammenfaßte.

§ 24. Die Absterbeordnungen aus den Gesamtheiten von Verstorbenen und Lebenden. Die in diese Gruppe fallenden

Geometrische Darstellung zur Sterbenstafel aus den a) Hauptgesamtheiten der Toten

I. Gattung

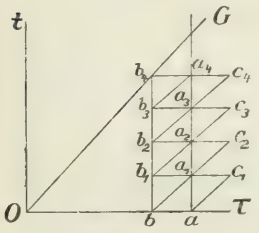


Fig. 10_1.

II. Gattung

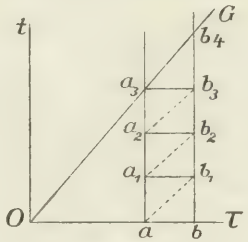


Fig. 10_2.

III. Gattung

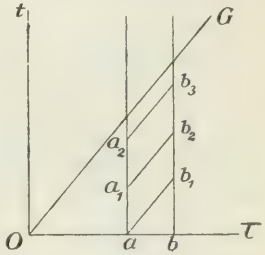


Fig. 10_3.

Sterblichkeitstafeln, *die Sterblichkeitstafeln gleichzeitig Lebender*, können entweder aus den verschiedenen *Hauptgesamtheiten* oder *Elementargesamtheiten* der Toten hergestellt werden.

b) Grundgesamtheiten der Toten

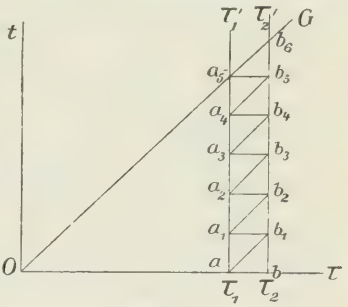


Fig. 10_4.

Die Unterschiede zwischen diesen verschiedenen Absterbeordnungen werden durch die vorstehenden Figuren deutlich.

Aus ihnen kann man ableiten:

1. Die Absterbeordnungen aus der I. Hauptgesamtheit (Fig. 10_1) werden durch Multiplikation der Ausdrücke

$$1 - \frac{a\,b\,a_1\,c_1}{b\,a_1}, \quad 1 - \frac{a_1\,b_1\,a_2\,c_2}{b_1\,a_2}, \quad 1 - \frac{a_2\,b_2\,a_3\,c_3}{b_2\,a_3}, \ldots$$

die aus der II. Hauptgesamtheit (Fig. 10_2) durch Multiplikation der Quotienten

$$1 - \frac{a\,b\,a_1\,b_1}{a\,a_1}, \quad 1 - \frac{a_1\,b_1\,a_2\,b_2}{a_1\,a_2}, \quad 1 - \frac{a_2\,b_2\,a_3\,b_3}{a_2\,a_3}, \ldots$$

die aus der III. Hauptgesamtheit (Fig. 10_3) durch Multiplikation der Quotienten

$$1 - \frac{2aa_1b_1b_2}{aa_1 + b_1b_2 + aa_1b_1b_2}, \quad 1 - \frac{2a_1a_2b_2b_3}{a_1a_2 + b_2b_3 + a_1a_2b_2b_3}, \ldots$$

erhalten.

Bei den Elementargesamtheiten (Fig. 10_4) entstehen sie endlich durch Multiplikation der doppelten Reihe von Faktoren:

$$1 - \frac{a_5b_5b_6}{a_5b_6}, \quad 1 - \frac{a_4b_4b_5}{a_4b_5}, \quad 1 - \frac{a_3b_3b_4}{a_3b_4}, \ldots$$

und

$$1 - \frac{a_4a_5b_5}{a_4a_5}, \quad 1 - \frac{a_3a_4b_4}{a_3a_4}, \quad 1 - \frac{a_2a_3b_3}{a_2a_3}.$$

2. Ebenso wie bei den Absterbeordnungen gleichzeitig Verstorbener werden auch bei denen der gleichzeitig Lebenden die Beobachtungen so vieler verschiedener Generationen, als Alter in einem Menschenleben enthalten sind, benützt. Es entspricht daher auch diesen Absterbeordnungen kein reales Ergebnis.

3. Unter den Absterbeordnungen gleichzeitig Lebender sind nur die Absterbeordnung aus den Hauptgesamtheiten I. Gattung und die aus den Elementargesamtheiten Skalen, welche zeigen, wie sich das Absterben nach den *Altern* ändert. Bei den Absterbeordnungen aus den Hauptgesamtheiten II. und III. Gattung werden Sterbenswahrscheinlichkeiten gleichzeitig Lebender und Sterblichkeitskoeffizienten verwendet. Die Absterbeordnung aus den Hauptgesamtheiten I. Gattung enthält zerstückte Beobachtungen zweier Kalenderjahre: die Absterbeordnung aus den Elementargesamtheiten die kompletten Beobachtungen eines Kalenderjahres.

Unter den bekannteren Absterbeordnungen beruhen auf den Sterbenswahrscheinlichkeiten:

1. *gleichaltrig Lebender:* die deutsche Sterblichkeitstafel aus den Erfahrungen der Jahre 1871—1881 (veröffentlicht im Novemberhefte des Jahrganges 1887 der Monatshefte zur Statistik des deutschen Reiches); die sächsische Sterblichkeitstafel aus den Beobachtungen des Königreichs Sachsen während der Jahre 1880/81, 1885/86, 1890/91, 1895/96, 1900/01 (veröffentlicht in der Zeitschrift des kgl. sächs. stat. Bureau 1894 und 1903),

2. *gleichzeitig Lebender:* die preußische Absterbeordnung (nach Böckh für das Jahr 1865, veröffentlicht im Jahrbuch für Nationalökonomie Bd. XXV Jahrg. 1875), die Absterbeordnung für die Niederlande von van Pesch (veröffentlicht in den Beiträgen zur Statistik der Niederlande 1897).

3. Auf Sterblichkeitskoeffizienten beruhen die Sterblichkeitstafel von Farr für England (veröffentlicht unter dem Titel English life

table etc., London 1864); die Sterblichkeitstafeln für England und Wales (veröffentlicht in den supplements to the 45^{the} and 46^{the} annual report of the registrar general of births deaths and marriages in England, London 1885); die amtlichen Sterblichkeitstafeln von Italien 1876—1887 und Frankreich. Auch die Sterblichkeitstafeln für Österreich von Kitz (aufgestellt auf Grund der Volkszählung vom Jahre 1869 und der Sterberegister und Geburtslisten der Jahre 1865/75, Zeitschrift des kgl. preuß. stat. Bureau, XXI, Berlin 1881) sind mit Hilfe des gleichen Maßes berechnet.

4. Auf *Elementarwahrscheinlichkeiten* beruhen die Berlinischen Absterbeordnungen (von Böckh veröffentlicht in den Berliner stat. Jahrbüchern).

Zusatz: Die Beobachtungsdaten für die Sterblichkeitsmessung sind vielfach nicht in einheitlicher Form entwickelt und überdies mit systematischen Fehlern behaftet. In allen diesen Fällen leisten die Methoden der *Aufteilung* (*Glättung*) *statistischer Gesamtheiten* gute Dienste.

Ihre Anwendung soll an einzelnen Beispielen erörtert werden.

Bei der Herstellung der deutschen Sterbetafel vom Jahre 1871/81 waren die Toten gewisser Gebiete (z. B. Bayerns) nur nach Altersklassen gegeben, während die gleichmäßige Behandlung des Materiales auch die Zerlegung nach Geburtsjahren verlangt hätte. Darnach war erforderlich, die Toten jeder Altersklasse in die beiden möglichen Geburtsjahre zu teilen. Diese Operation konnte verhältnismäßig nach den entsprechenden Gesamtheiten der Geborenen erfolgen.

Tatsächlich erfolgte sie jedoch nur mit Hilfe einer festen arithmetischen Formel. Es wurde nämlich angenommen, daß die nach Geburts- und Altersjahren zerlegten Gesamtheiten (die Elementargesamtheiten) eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung bilden, aus welcher sodann jeder einzelne Teil gerechnet werden kann. Unter solcher Annahme werden nämlich die Elementargesamtheiten zu drei auf einander folgenden Totengesamtheiten t_1, t_2, t_3 durch

$$\alpha,\quad \alpha+\delta,\quad \alpha+2\delta+\varepsilon,\quad \alpha+3\delta+3\varepsilon,\quad \alpha+4\delta+6\varepsilon,\quad \alpha+5\delta+10\varepsilon$$

dargestellt werden können und zur Bestimmung der α, δ, ε die drei Gleichungen dienen

$$t_1 = 2\alpha+\delta, \qquad t_2 = 2\alpha+5\delta+4\varepsilon, \qquad t_3 = 2\alpha+9\delta+16\varepsilon,$$

woraus zunächst

$$\alpha = \frac{11t_1 - 4t_2 + t_3}{16}, \qquad \delta = \frac{4t_2 - 3t_1 - t_3}{8}, \qquad \varepsilon = \frac{t_3 - 2t_2 + t_1}{8}$$

und für die beiden Teile des Mittelgliedes

$$\alpha + 2\delta + \varepsilon = \frac{t_2}{2} + \frac{t_1 - t_3}{16}, \quad \alpha + 3\delta + 3\varepsilon = \frac{t_2}{2} - \frac{t_1 - t_3}{16}$$

folgt.

Ähnlich verfährt man, um die bei Volkzählungen sehr oft beobachteten Häufungen von Mengen der Lebenden und Toten in gewissen Altersklassen, den durch 5 oder 10 teilbaren Altern, und ebensolchen Geburtsjahren zu zerlegen.

Man kann zu diesem Zwecke die beobachteten Lebenden je dreier aufeinander folgender Alter summieren und drei Nachbarresultate in je drei Glieder zerlegen, welche untereinander eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung bilden. Die drei Mittelglieder der zerlegten Reihe werden sodann als die durch Häufung nicht mehr irritierten Resultate angesehen.

Sind sohin

$$a = l_1 + l_2 + l_3, \quad b = l_2 + l_3 + l_4, \quad c = l_3 + l_4 + l_5,$$

so ist a in α, $\alpha + \delta$, $\alpha + 2\delta + \varepsilon$, b in $\alpha + 3\delta + 3\varepsilon$, $\alpha + 4\delta + 6\varepsilon$, $\alpha + 5\delta + 10\varepsilon$ und c in $\alpha + 6\delta + 15\varepsilon$, $\alpha + 7\delta + 21\varepsilon$, $\alpha + 8\delta + 28\varepsilon$ zu zerlegen.

Daraus folgt wieder zunächst für

$$\alpha = \frac{41a - 19b + 5c}{81}, \quad \delta = -\frac{2c - 7b + 5a}{27}, \quad \varepsilon = \frac{c - 2b + a}{27},$$

für das Mittelglied

$$\alpha + 4\delta + 6\varepsilon = \frac{29b - (a + c)}{81},$$

für das an a grenzende Glied $\frac{26b + 5a - 4c}{81}$, endlich für das an c grenzende Glied $\frac{26b - 4a + 5c}{81}$.

Beispielsweise wird über die Volkszählungsergebnisse des deutschen Reiches im Jahre 1880 mitgeteilt, daß aus dem Geburtsjahre 1872 bis 1867 bezw. 1 045 623, 852 884, 967 543, 952 067, 927 209 Personen stammen.

Hieraus findet man $a = 2\,866\,650$; $b = 2\,772\,494$; $c = 2\,846\,819$ und endlich als das für l_3 eintretende Mittelglied 922 092; das für l_2 als 926 269; das für l_4 als 924 132. Die Summe der neu berechneten drei Glieder beträgt gleichfalls b.

Ähnliche Glättungen fanden auch an den beobachteten Totengesamtheiten statt.

Das Problem der Aufteilung spielt noch eine wesentliche Rolle bei Berücksichtigung der Wanderungen. Die in den Formeln der Sterbenswahrscheinlichkeiten gleichzeitig Lebender und der Sterblich-

keitskoeffizienten vorkommenden Lebenden am Ende des Beobachtungsjahres werden nämlich aus der Volkszählung zu Beginn des Jahres, den Toten und den Wanderungen im Laufe des Jahres bestimmt. Weil aber auch bei genauester Evidenthaltung der letzteren Personen abgehen, so werden die aus einer Volkszählung mit Berücksichtigung der Sterbefälle und Wanderungen im ganzen Zeitraume bis zur nächsten Volkszählung rechnungsmäßig bestimmten Lebenden mit den tatsächlich Lebenden verglichen und der Defekt aufgeteilt. Die Aufteilung kann verhältnismäßig nach der Zeit oder auch mit Rücksicht auf die Altersbesetzung oder in noch komplizierterer Art erfolgen.

Für die Richtigkeit solcher Methoden ist natürlich die tunlichst häufige Volkszählung die unumgängliche Voraussetzung.

§ 25. Die Absterbeordnungen aus den Jahresberichten der Versicherungsgesellschaften. Über die Erfahrungen der Versicherungsgesellschaften sind seit jeher periodische, in vielen Fällen sogar jährliche Ausweise veröffentlicht worden, aus welchen sich die Zahl der zu Beginn der Periode in gewissen Altersspatien vorhandenen Risken und die aus ihnen hervorgehenden Toten entnehmen lassen. Diese Nachweise müssen als desto mangelhafter angesehen werden, je größer die Altersspatien oder die Perioden der Ausweisleistung gewählt werden. Wird beispielsweise über fünfjährige Altersstrecken jährlich berichtet, dann kann die resultierende Maßzahl je nach der Verteilung der Individuen über die einzelnen Alter jedem Alter innerhalb des Spatiums zukommen. In welcher Weise jedoch die Altersverteilung im einzelnen ausschlägt, geht aus der folgenden Analyse hervor. Gehören l_x Personen dem Alter x, l_{x+1} Personen dem Alter $x+1$, l_{x+2} Personen dem Alter $x+2\cdots$ an, und sind die zugehörigen Sterbenswahrscheinlichkeiten w_x, w_{x+1}, $w_{x+2}\cdots$, dann ist der Mittelwert der Gruppe

$$w_m = \frac{w_x l_x + w_{x+1} l_{x+1} + w_{x+2} l_{x+2} + w_{x+3} l_{x+3} + w_{x+4} l_{x+4}}{l_x + l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + l_{x+4}}.$$

Wird nun angenommen, daß sich die Sterbenswahrscheinlichkeiten innerhalb des Spatiums näherungsweise durch eine arithmetische Progression ausdrücken, und setzt man

$$w_{x+1} = w_{x+2} - a,\ w_{x+3} = w_{x+2} + a,\ w_x = w_{x+2} - 2a,$$
$$w_{x+4} = w_{x+2} + 2a,$$

so ergibt sich

$$w_m = w_{x+2} + a\,\frac{(l_{x+3} - l_{x+1}) + 2(l_{x+4} - l_x)}{l_x + l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + l_{x+4}}.$$

Das Zusatzglied verschwindet für eine symmetrische Lagerung der l_x um l_{x+2}. Für den Fall, daß die l_x selbst eine arithmetische Progression bilden und $l_{x+i} = l_x + id$, wird

$$w_m = w_{x+2} + a\,\frac{2d}{l_x + 2d},$$

ein Wert, welcher unter allen Umständen zwischen w_{x+1} und w_{x+3} bleibt, falls d positiv ist oder zumindest den Wert von $\frac{l_x}{4}$ nicht überschreitet.

Man pflegt daher ganz allgemein bei derlei Untersuchungen m mit $x + 2$, sohin mit dem mittleren Alter der Gruppe zu identifizieren. Eine nähere Untersuchung zeigt noch, daß — unabhängig von der Verteilung der Lebenden über die Gruppe — m nicht $x + 3$ überschreitet, falls

$$3l_x + 2l_{x+1} + l_{x+2} > l_{x+4}$$

und nicht unter $x + 1$ liegt, falls

$$3l_{x+4} + 2l_{x+3} + l_{x+2} > l_x.$$

Zu der in Rede stehenden Klasse von Sterbetafeln gehört vor allem die von Dépariceux. Dieselbe fußt auf dem Material zweier französischer Tontinen, welche im Jahre 1689 und 1696 unter Berücksichtigung von 14 Altersklassen mit je 5 Jahren[1]) gegründet wurden. Die für die Ableitung der Tafel erforderlichen Angaben sind den jährlichen, die Zahl der noch lebenden Teilnehmer enthaltenden Berichten, welche die Tontinenverwaltung zur Kontrolle ihrer Geschäftsführung unter die Interessenten verteilte, entnommen; dieselben enthielten auch die Zahl der in jede Klasse eingetretenen und die Zahl der in ihr jährlich verstorbenen Personen. Dépariceux schrieb die Zahl der Lebenden der Altersklasse n dem Alter $5n - 3$ zu; sodann lieferte jede beliebige Altersklasse zu jedem Beobachtungsalter eine bestimmte Anzahl von Lebenden. Die Lebenden des Alters $5n - 3$ waren z. B.

$$C_n + C^5_{n-5} + C^{10}_{n-10} + \cdots,$$

wobei C^k_{n-k} die Anzahl der im Alter $n - k$ eingetretenen, nach k Jahren vorhandenen Individuen bedeutet. Wenn nun aus den Jahresberichten registriert wurde, wie viele Personen jeder Altersklasse in je 5 Jahren starben, und diese Zahlen mit M_n, $M^5_{n-5} \cdots$ bezeichnet

[1]) und zwar bildete die erste Klasse C_1 die 0 — 5-jährig, die zweite Klasse C_2 die 5 — 10-jährig, die dritte Klasse C_3 die 10 — 15-jährig usw. . . ., die vierzehnte Klasse C_{14} die 65 — 70-jährig Eingetretenen.

werden, dann läßt sich die Wahrscheinlichkeit eines $5n-3$jährigen Individuums, binnen 5 Jahren zu sterben, mit

$$w^{(5)}_{5n-3} = \frac{M_n + M^5_{n-5} + M^{10}_{n-10} + \cdots}{C_n + C^5_{n-5} + C^{10}_{n-10} + \cdots}$$

berechnen. Die Komplemente dieser Zahlen bilden die Lebenswahrscheinlichkeiten für fünfjährige Beobachtungsperioden und die Produkte dieser Komplemente von der niedrigsten Altersklasse aufwärts:

$$(1 - w^{(5)}_2)\,(1 - w^{(5)}_7)\,(1 - w^{(5)}_{12}) \cdots (1 - w^{(5)}_{5n-3})$$

die Zahl der von einer Einheit zweijähriger, das Alter von $5n+2$ Jahren erreichenden Personen. Die in Intervallen von 5 zu 5 Jahren beobachteten Lebenden wurden sodann durch lineare Interpolation ausgeglichen.

Die Tontiniten waren fast sämtlich Pariser: die Zahl der in die Beobachtung Eingetretenen betrug 9260, die Zahl der beobachteten Toten 7933.

Es ist beachtenswert, daß in dieser Tafel zur Beobachtung der Sterbenswahrscheinlichkeit w^5_{5n-3} Gesamtheiten verwendet werden, welche zwischen den Altern $5n-5$ bis $5n+5$ sterben, daß aber die Mehrzahl der Todesfälle allerdings in die dem hypothetischen Anfangsalter $\overline{5n-3}$ folgende fünfjährige Altersstrecke $5n-2$ bis $5n+2$ fallen muß. Nennt man allgemein die aus einer Gruppe im Alter x und dem Beobachtungsjahr i Sterbenden m^i_x, dann sterben im

Beobachtungsjahre	in den Altern $\overline{5n-4}$	$\overline{5n-3}$	$\overline{5n-2}$	$\overline{5n-1}$	$\overline{5n}$	$\overline{5n+1}$	$\overline{5n+2}$	$\overline{5n+3}$	$\overline{5n+4}$
1	m^1_{n-4},	m^1_{n-3},	m^1_{n-2},	m^1_{n-1},	m^1_n,				
2		m^2_{n-3},	m^2_{n-2},	m^2_{n-1},	m^2_n,	m^2_{n+1}			
3			m^3_{n-2},	m^3_{n-1},	m^3_n,	m^3_{n+1},	m^3_{n+2}		
4				m^4_{n-1},	m^4_n,	m^4_{n+1},	m^4_{n+2},	m^4_{n+3}	
5					m^5_n,	m^5_{n+1},	m^5_{n+2},	m^5_{n+3},	m^5_{n+4}

Von den beiden ältesten Privatversicherungsgesellschaften der Amicable und der Equitable wurden Geschäftsberichte alljährlich veröffentlicht, in welchen nach Altersklassen von je 10 Jahren ($10-20$, $20-30$, ...) die vorhandenen Mitglieder und die alljährlich Verstorbenen enthalten waren. Auf Grund dieser Mitteilungen wurden die Sterbetafeln von Griffith Davies (1825), Gompertz (1825), Babbage (1826), Morgan (1828) berechnet.

Aus ähnlichen Angaben Sterbetafeln zu konstruieren, wäre dermalen ein Leichtes, weil fast sämtliche Versicherungsanstalten der-

artige Sterblichkeitsnachweisungen alljährlich veröffentlichen. Zu einer aus solchen Nachweisen herstellbaren österreichischen Tafel könnten die entsprechenden Nachweisungen der amtlichen Statistik der privaten Versicherungsunternehmungen in den im Reichsrate vertretenen Königreichen und Ländern während der Jahre 1898—1902 benützt werden. In der Publikation für das Jahr 1902 ist (auf pag. 70) angegeben, wie viele Personen während des erwähnten 5jährigen Zeitraumes in jedem Alter unter Risiko standen und wie viele Personen daraus starben.

Man entnimmt ebendaselbst als 1000faches w für das Alter

26—30,	31—35,	36—40,	41—45,	46—50,	51—55,	56—60,	61—65.
4,29	4,96	6,71,	9,91,	13,81,	19,95,	27,84,	40,55.

66 — 70,	71 — 75,	76 — 80,	81 — 85,	86 —90.
57,61,	83,51,	119,75,	173,08,	212,36.

§ 26. Die Absterbeordnungen aus dem Urmateriale geschlossener Gesellschaften. Das Verfahren bei Konstruktion der Sterbetafeln, sowie die Resultate derselben hängen ab: 1. von der Maßeinheit, 2. von der Zähleinheit, 3. von dem manipulativen Verfahren. Über die *Maßeinheit* wurde bereits im ersten Abschnitte ausgeführt, daß zur Sterblichkeitsmessung Versicherter dreierlei Sterbenswahrscheinlichkeiten: die deutsche, Gothaer und die englische herangezogen werden können.

Als *Zähleinheiten* werden bei Sterblichkeitsmessungen von Versicherungsgesellschaften entweder der Versicherungsvertrag oder die versicherte Summe oder die Person oder endlich die Selektion zugrunde gelegt.

Der Versicherungsvertrag wurde ein einziges Mal (bei Konstruktion der Sterbetafel der 17 englischen Gesellschaften) verwendet.

Zwischen ihm und der Aufgabe der Sterblichkeitsmessung besteht a priori kein unmittelbarer Zusammenhang, weil bei der letzteren nicht die Veränderung an der Zahl der Verträge, sondern eine solche an den Versicherten selbst in Frage steht, ferner die Sterblichkeit eine von der Willkür freie Zahl bedeutet, während die Zahl der auf einen Kopf entfallenden Verträge im Belieben jedes Versicherten liegt. Trotzdem erweisen sich die auf dieser Grundlage durchgeführten Sterblichkeitsmessungen nicht als unzutreffend. Zur Erläuterung dieser letzteren Tatsache kann man die Vorgänge in dem nach Policen gezählten Versicherungsstock mit denen eines Urnenspiels vergleichen, in welchem die Kugeln für das gleiche Ergebnis nicht unabhängig sind. Die verbundenen Kugeln entsprechen den auf eine Person entfallenden Verträgen. In einem solchen Spiele ist die *Fehlergröße*

allerdings von der eines Urnenspiels mit unverbundenen Kugeln verschieden, das *schließliche Verhältnis* bei wachsender Versuchszahl jedoch von der Tatsache der Abhängigkeit nicht bedingt.

Auf ganz analoger theoretischer Grundlage ruht die zweite Zähleinheit, die versicherte Summe. Die Willkürlichkeit der Wahl der Versicherungssumme wird zunächst nur die Fehlergröße, nicht aber das schließliche Ergebnis beeinflußen.

Die große Mehrzahl der Sterblichkeitsmessungen erfolgte daher bis in die neueste Zeit nach Personen, weil die Sterbetafel angeben soll, wieviele von einer Einheit von *Personen* jedes Jahres innerhalb eines Alters sterben bezw. am Ende des Jahres noch vorhanden sind. Aber auch diese Zähleinheit ist nicht widerspruchsfrei, wenn der *Einfluß der Beobachtungsdauer* auf die Sterblichkeit mit konstatiert werden soll.

Es kommt nämlich häufig vor, daß eine schon einmal versicherte Person ihr Vertragsverhältnis löst und nach einiger Zeit einen neuen Vertrag eingeht. In solchem Falle läßt sich die Frage nicht ohne Willkür beantworten, ob die neue Beobachtungsdauer ganz unabhängig von der alten in Rechnung gezogen werden soll, ob die zwischen beiden Beobachtungsdauern liegende, nicht beobachtete Zeitstrecke als nachträglich verifiziert in die Beobachtung einzuschließen ist, oder ob nicht endlich die Zahl der Beobachtungsjahre zwar mit Rücksicht auf das erste Vertragsverhältnis und die inzwischen vollendeten Altersjahre zu bestimmen, aber die nicht beobachtete Zeit gänzlich außer Rechnung zu stellen ist. Tatsächlich ist nämlich der erste Modus nächstliegend, der zweite Modus für die Behandlung der mehrfach Versicherten bei der deutschen Tafel, der dritte Modus bei der Tafel der 20 englischen Gesellschaften gewählt worden.

Überdies erscheint die erwähnte Zähleinheit auch darin mangelhaft, daß die Erhebungen in Rücksicht der Konstatierung jenes Momentes, welches ersichtlich die Beeinflussung der Wahrscheinlichkeit bei den Erhebungen nach der Beobachtungsdauer bewirkt, nämlich der Zeit der Vertragsdauer, unzulänglich sind. Die in zweiter Versicherung mit neuerlicher ärztlicher Untersuchung fortgesetzte Beobachtungsdauer kann nicht (bei richtiger Bemessung des Einflusses der Vertragsdauer) mit den höheren Vertragsdauern der ersten Versicherung identifiziert werden. Solches geschieht aber durch die Elimination der mehrfachen Versicherungen, ferner bei Berücksichtigung der Unterbrechungen nach deutschem oder englischem Modus und zwar in diesem Falle insbesondere dann, wenn — um den Einfluß der Selektion aus einer

Sterbetafel mit der Person als Zähleinheit zu eliminieren — die Beobachtungen einer bestimmten, drei-, fünf- oder achtjährigen Vertragsdauer ausgelassen werden.

Es werden demnach in der neuesten Zeit als Zähleinheiten die Zahlen der *Selektionen* eingeführt. Jede Person ist nach dieser Messungsgrundlage so oft in Betracht zu ziehen, als sie zu verschiedenen Zeiten in die geschlossene Gesellschaft aufgenommen wurde. Finden sich bei der Zählung Unterbrechungen in der Versicherung, dann entfällt die Zeit der Unterbrechung gänzlich.

Die Zähleinheit beeinflußt die Zählarbeiten in erheblichem Maße. Bei dem *Vertrage als Zähleinheit* kann in das manipulative Verfahren der Zählung unmittelbar eingetreten werden. Bei der *versicherten Summe* wird sich die Anlage verschiedener Zählkarten beim Wechsel in der versicherten Summe als empfehlenswert erweisen (vergleiche die Erörterung zur amerikanischen Sterbetafel auf p. 110). Bei der *Person* als Zähleinheit muß vorerst die Ausscheidung aller mehrfachen Versicherungen desselben Lebens durch den außerordentlich zeitraubenden Prozeß der Legung der Zählkarten in alphabetischer Ordnung erfolgen. Bei der *Selektion* ist nur die Elidierung der uneigentlichen Mehrversicherungen aus dem Gesamtstocke durchzuführen, was bei einem ordnungsmäßig geführten Register der Versicherungen mühelos gelingt.

In Rücksicht des *manipulativen Verfahrens* werden die folgenden Wege unterschieden.

Nach dem durch die alten englischen Sterblichkeitsmessungen eingeführten, *dem englischen Manipulationsverfahren*, werden alle Versicherten auf Zählkarten mit dem Geburtsdatum, Eintritts- und Austrittsdatum aufgetragen und hieraus für jeden Versicherten Eintrittsalter, Austrittsalter und Versicherungsdauer berechnet. Die Karten werden sodann in drei Hauptpäcke je nach der Art des Austrittes aus der Beobachtung (Austritt durch Tod, Austritt wegen Vollendung des Zähltermines und Austritt aus sonstigen Ursachen) und innerhalb jedes dieser Hauptpäcke wieder nach gleichem Eintrittsalter zerlegt; in diesem letzteren aber wird die Anordnung der Karten in Unterpäcke gleicher Versicherungsdauer bezw. gleichen Austrittsalters getroffen. Die Zahl der Karten jedes Unterpackes wird sodann in ein dem Formular I des Abschnittes II entsprechendes Formular eingetragen.

Das Verfahren weist gewisse Unterschiede auf, je nachdem die Gesamtheiten der Lebenden und Toten nach der deutschen, Gothaer oder englischen Methode ermittelt werden sollen.

Bei der deutschen Methode werden alle Altersangaben nach Jahren, Monaten und Tagen genau, bei der Gotha- und englischen Methode Eintrittsalter und Vertragsdauer nur nach ganzen Jahren berechnet. Bei der deutschen Methode werden als gleiche Eintrittsalter alle Altersstufen bis zu einer bestimmten Grenze (also als Beitrittsalter „a“ die Altersstufen zwischen $a-1$ bis a), bei der Gotha-Methode als gleiche Eintrittsalter alle Altersstufen, welche sich um ein mittleres Alter gleichmäßig verteilen (also als Beitrittsalter a die Altersstufen zwischen $a-\frac{1}{2}$ bis $a+\frac{1}{2}$), angesehen und bei der englischen Methode die Altersstufen mit Rücksicht auf den dem Eintrittstage folgenden 31. Dezember bestimmt. Bei der deutschen Methode werden die Austritte nach gleichen Austrittsaltern, bei der Gotha-Methode nach gleichen Versicherungsdauern, bei der englischen Methode nach dem wiederholten Vorhandensein am 31. Dezember zerlegt.

Nach *dem französischen Manipulationsverfahren* werden die Versicherten in derselben Art auf Karten mit dem Geburtsdatum, Eintrittsdatum und Austrittsdatum eingetragen und die Karten ohne Berechnung der resultierenden Alter nach gleichen Geburtsdaten zerlegt. Sodann erfahren die Karten gleicher Geburtsdaten einerseits die Anordnung nach gleichem Eintrittsdatum, andererseits (durch vollständige Umordnung) nach gleicher Austrittsursache und gleichem Austrittsdatum. Die Übertragung der resultierenden Gesamtheiten erfolgt dann unmittelbar in die Spalten 1 und 2 bezw. in die Spalten der Fußnote eines Formulars von entsprechendem Beobachtungsjahr und Geburtsdatum. Das erwähnte Formular hat die folgende Gestalt:

Formular III.

Geburtsdatum vom 1. Juli $n-1$ bis 30. Juni n — Alter $a-n$ — Beobachtungsjahr a

Nummer	Eingetreten	Zahl der Eintritte	Zahl der Austritte	Zahl der Todesfälle
1	Vom 1. Juli bis 31. Dezember des Jahres a (rot)			
2	Vom 1. Juli des Jahres $a-1$ bis 30. Juni des Jahres a			
3	$^1/_4$ der roten Zahlen			
4	Summe von 2 und 3			
5	Verblieben am 31. Dezember des Jahres $a-1$			
6	Summe von 4 und 5		6—3	
7	Ab die Hälfte der Austritte		Summe der Austritte und Todesf.	
8	Zahl der Risken (6 und 7)		Verblieben am 31. Dez. a	

Nach Vollendung der Eintragungen in die Rubriken 1 und 2 bezw. auch die Fußnote werden alle Formularien, welche zum selben Geburtsjahr gehören, vereinigt und nach Beobachtungsjahren geordnet. Nachdem sodann das Formular des ältesten Beobachtungsjahres, welches keine Eintragung in der Zeile 5 besitzt, in allen Spalten berechnet und ausgefüllt ist, wird die letzte Zeile der letzten Kolonne in die 5. Zeile des Formulars des nächsten Beobachtungsjahres eingetragen und wieder die Berechnung aller Spalten vorgenommen. Von diesem Formular geht man sodann in das Formular mit dem drittältesten Beobachtungsjahr usf.

Das Manipulationsverfahren rührt von Kartangyi. Es verzichtet auf die Konstatierung der Sterblichkeit nach der Vertragsdauer.

Im nachfolgenden sollen nun die wichtigsten Absterbeordnungen, welche nach den obenerwähnten Methoden konstruiert wurden, aufgezählt werden.

Die Finlaisonschen Tafeln betreffend die englischen Staatsrentner. Als Beitrittsalter wird ein mittleres Alter angenommen und für dieses die Sterblichkeit bestimmt. Die von Finlaison verwendete Gleichung zur Berechnung der ein bestimmtes Altersjahr Erlebenden

$$l_x^{(1)(2)} = l_{x+1}^{(1)} + E_{x+1}^{(1)(2)} - [A_x^{(1)(2)} + M_x^{(1)(2)} + l_x^{(2)}]$$

(siehe die Gleichung III des Abschnittes I) lieferte eine zu große Anzahl Beobachtungsjahre, weil diejenigen Personen, welche zwischen den Altern x und $x+1$ eingetreten waren, als ein ganzes Jahr unter Beobachtung stehend betrachtet wurden. Er zog deshalb die Beobachtungszeit vom selben Normaltage, dem 1. April des Jahres, in welchem sich der Eintritt vollzog, bis zum Tage des faktischen Eintrittes ab. John Finlaison hat sechs verschiedene Tafeln aus Beobachtungen über 9347 Männer und 13005 Frauen konstruiert. Sein Nachfolger A. G. Finlaison hat die Beobachtungen fortgesetzt und auf 11154 Männer mit 8083 Todesfällen sowie 16538 Frauen mit 10982 Todesfällen erstreckt. Die Personen gehörten zumeist der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts an. Den Schluß der Beobachtung bildete allseits das Jahr 1825.

Brunes Sterbetafel. Als Tafelalter wurde das dem wahren Alter nächstliegende ganze Alter angesehen. Die Eintritte in die Beobachtung erfolgten am 1. April und 1. Oktober. Die Lebenden jedes Alters wurden gesondert für die am 1. April und 1. Oktober Eingetretenen und zwar in der Art zu Gesamtheiten vereinigt, daß aus den nach Altersklassen getrennten Lebenden zu Beginn aller Beob-

achtungen (des Kalenderjahres 1776) durch Berücksichtigung von Zu- und Abgang oder Tod im selben Kalenderjahr die Gesamtheiten gleichen Alters des nächsten Kalenderjahres (1777) und in gleicher Weise des folgenden Kalenderjahres (1778) usf. bestimmt und schließlich die sämtlichen Lebendengesamtheiten gleichen Alters aus allen derart gewonnenen Beobachtungsreihen vereinigt wurden. Es ist ohne weiteres ersichtlich, wie bei solchem Verfahren die Totengesamtheiten sich entwickelten. Als Sterbenswahrscheinlichkeit galt: $T_x : V_x - \frac{A_x}{4}$.[1]) Beobachtet wurden die Angehörigen der preußischen Witwenverpflegungsanstalt zu Berlin zwischen den Jahren 1776—1834 (ältere Brunesche Tafel) und später die zwischen 1776—1845 (Brune-Fischersche Tafel). Es wurden beobachtet bei den Männern 577776 verlebte Jahre mit 11501 Todesfällen, bei den Frauen 717163,5 verlebte Jahre mit 12788 Todesfällen (Heyms bezügl. spätere Beobachtungen desselben Materiales erstreckten sich sogar bis zum Jahre 1852).

Die Tafel der 17 englischen Gesellschaften. Die Zähleinheit war die Police, das Sterblichkeitsmaß das englische. Das Material wurde in zwei Gruppen behandelt und zwar: In einer wurden die Geschlechter getrennt und 36414 Verträge für Männer und 4202 Verträge für Frauen, in der zweiten Gruppe 43289 Verträge ohne Trennung nach dem Geschlechte gezählt. In der ersten Gruppe fand die Verteilung der Verträge, außer nach dem Geschlechte, nach dem Wohnort (Stadt, Land, Irland), sodann nach der Austrittsursache, nach gleichem Eintrittsalter und endlich nach dem Kalenderjahr des Austrittes statt. Das Eintrittsalter ward derart bestimmt, daß den zwischen den Altern x und $x+1$ Eingetretenen am 1. Juli des Beitrittsjahres das Beitrittsalter $x + \frac{1}{2}$ beigemessen wurde; als Versicherungsdauer zählte die Anzahl der erlebten 31. Dezember. Mit den auf diese Weise gewonnenen Endzahlen wurde die folgende Tabelle ausgefüllt.

Formular IV.

Eintrittsalter	Versicherungsdauer in Jahren									
	0			1			2			
	e	t	v	e	t	r	e	t	v	u. s. f.
a										
$a+1$										
$a+2$										

[1]) worin die T_x, V_x und A_x Todesfälle, Eintritte und Austritte aller Altersklassen bedeuten.

Hierin bedeutet: e die Zahl der bei Lebzeiten Ausgetretenen; t die Zahl der in der Beobachtungszeit Verstorbenen; v die Zahl der den Zähltermin Erfüllenden. Die Angaben dieses Formulars wurden in ein weiteres Formular übertragen, das in der 1. Kol. „Altersjahre", in der 2. Kol. „Eingetretene" als Summe der Ziffern der Horizontal-Zeilen des Schema IV, in der 3., 4. und 5. Kol. die „Ausgetretenen durch Tod, bei Lebzeiten und durch Erfüllung des Zähltermines" als Summe der Ziffern der Diagonalzeilen des Schemas IV (vom Eintrittsalter $a + n - k$ und der Versicherungsdauer k) enthielt. Die Gesamtheiten der Lebenden wurden hieraus in Analogie des Schema I im Abschnitte I, also nach dem Satze gewonnen, daß die Gesamtheiten der Lebenden irgend eines Alters der Summe aller Differenzen von Eintritt und Austritt in den vorausgehenden Altern gleichkommen. Von der zweiten Gruppe wurde aus dem Materiale jeder Gesellschaft nach einer dem jeweiligen Bedürfnisse angepaßten Methode die Zahl der in jedem Alter dem Risiko ausgesetzten und der davon binnen einem Jahre Verstorbenen ermittelt. Die Erfahrungen beider Gruppen wurden zu einer einzigen Tafel vereinigt. An der Sterblichkeitsmessung beteiligten sich 17 englische Gesellschaften. Die Beobachtungen wurden mit 31. Dezember 1837 geschlossen und im Jahre 1843 veröffentlicht.

Die Tafel der 20 englischen Gesellschaften. Die Zähleinheit war die versicherte Person; das Sterblichkeitsmaß das englische. Es wurden 160426 Personen gezählt, von welchen 26721 Personen gestorben waren. Man teilte das Material in gesunde Männer, gesunde Frauen, kränkliche Personen beider Geschlechter, Versicherte höherer Gefahr beider Geschlechter. Als Eintrittsalter galt das dem Alter am 31. Dezember des Eintrittsjahres folgende Alter. Das Material wurde auf Karten für jeden Versicherungsfall übertragen und diese wieder nach gleichen Eintrittsaltern und sodann nach Kalenderjahren des Austrittes zerlegt. Die Endresultate wurden in ein Zählformular eingetragen, welches in den Grundzügen dem Schema I des Abschnittes II entspricht. Unabhängig von diesen Tafeln beantwortete man durch eine zweite Zählung, wie viele Versicherte ohne Rücksicht auf das Eintrittsalter in jedem Beobachtungsalter ein- und ausgetreten waren.

An der Konstruktion beteiligten sich 10 englische und 10 schottische Gesellschaften. Die Beobachtung wurde am 31. Dezember 1862 geschlossen und im Jahre 1869 veröffentlicht.

Konstruiert wurde die Tafel H^M für Männer über alle Versicherungsdauern; die Tafeln H^F und $H^{M,F}$ von der gleichen Art für Frauen und für beide Geschlechter; sodann die Tafeln H^{M_5}, H^{F_5}

und H^{M,F_3} nach Ausschluß der Beobachtungen der ersten fünf Versicherungsjahre; endlich die Tafel für ungesunde Leben. Auch wurden genaue Beobachtungen über die Abhängigkeit der Sterblichkeit von der Versicherungsdauer angestellt.

Die Tafeln der englischen Gesellschaften 1863—1893. Die Zähleinheit war die Person, das Sterblichkeitsmaß das von Gotha, die Manipulation dieselbe, wie bei der Tafel der 20 englischen Gesellschaften. Das Material wurde nach Alter, Geschlecht, Versicherungskombination (mit den Unterschieden mit Anteil und ohne Anteil am Gewinne), nach alten (vor dem Jahre 1863 abgeschlossenen) und neuen (nach dem Jahre 1863 abgeschlossenen) Versicherungen untersucht. In den wichtigsten Kombinationen dieser Einteilungsgründe war an Beobachtungsmaterial vorhanden:

Todesf.-Vers.	Männer,	alt,	mit	Ant.	am	Gew.,	Jahresbeob.	2,7	Mill.,	Todesf. 86982
„	„	„	ohne	„	„	„	„	0,2	„	„ 9785
„	„	neu	mit	„	„	„	„	4,4	„	„ 53907
„	„	„	ohne	„	„	„	„	0,4	„	„ 6661
„	„	Frauen,	alt	mit	„	„	„	0,2	„	„ 9320
„	„	„	neu	mit	„	„	„	0,3	„	„ 4833
Gemischte Vers.	Männer,	alt		—	—	—	—	0,07	„	„ 875
„	„	„	neu		—	—	—	0,8	„	„ 4854
Renten-Vers.		„	alt		—	—	—	0,01	„	„ 1336
„	„	„	neu		—	—	—	0,05	„	„ 3093
„	„	Frauen,	alt		—	—	—	0,05	„	„ 3950
„	„	„	neu		—	—	—	0,16	„	„ 7152

Die „alten“ Policen wurden übrigens nur rücksichtlich jenes Beobachtungstermines berücksichtigt, welcher nach dem Tagesdatum fiel, der in das Jahr 1863 gehörte. Die Austritte wurden, je nachdem sie dem einen oder andern Datum näher lagen, so verzeichnet, als ob sie am Anfang oder Ende des Versicherungsjahres stattgefunden hätten, in welchem sie erfolgten. Als solche, die am Schlusse der Beobachtungsperiode verblieben waren, wurden diejenigen ermittelt, die am Tagesdatum der Police im Jahre 1893 vorhanden waren. An der Konstruktion der Tafel haben sich 60 Gesellschaften beteiligt.

Die nach Altern und Vertragsdauern abgestuften Tafeln wurden in der Art konstruiert, daß die Ergebnisse für die ersten 10 Vertragsjahre (Selektionstafeln), ferner Aggregattafeln ohne Unterschied der Vertragsdauer, sowie nach Elidierung der ersten 5 und 10 Vertragsjahre hergestellt wurden.

Die Tafeln der 30 amerikanischen Gesellschaften. Die Zähleinheit

war die Anzahl der Beträge à 1000 $, auf welche die Versicherungssumme einer Person lautete[1]), das Sterblichkeitsmaß das englische. Als Eintrittsalter wurde das dem Alter am 31. Dezember des Eintrittsjahres nächstliegende ganzzahlige Alter gewählt. Die Beobachtungsdaten wurden durch die Methode der final series ergänzt, indem die Anzahl der am Zähltage (dem 31. Dezember 1874) Vorhandenen nach den Beobachtungen am übrigen Beobachtungsmaterial rechnungsmäßig verfolgt und die auf solche Weise gewonnenen Resultate dem übrigen Beobachtungsmateriale zugezählt wurden. Im ganzen waren 1027529 Zählkarten vorhanden, wovon 46543 den Tod der Personen, auf die sie lauteten, meldeten.

Außer dieser allgemeinen Sterblichkeitstafel wurden noch von einzelnen amerikanischen Gesellschaften Sterblichkeitsmessungen und zwar vielfach auf Grundlage der Versicherungssumme als Zähleinheit angestellt. Unter ihnen hat die der „New-York" im Jahre 1858 auf Grund der Beobachtungen von 68000 Leben abgeleitete American exp. table eine gewisse allgemeinere Bedeutung erlangt.

Die Sterblichkeitstafeln der Gothaer Lebensversicherungsbank. Die Zähleinheit war die versicherte Person, das Sterblichkeitsmaß das Gothaer. Jede Zähleinheit erhielt eine besondere Zählkarte. Die Gruppenteilung erfolgte, wie bei der Tafel der 20 englischen Gesellschaften. Bisher wurden an drei verschiedenen Terminen Beobachtungen angestellt. Hopf beobachtete 27210 Eingetretene und 4519 Todesfälle. Der Zähltermin war der 31. Dezember 1853. Karup beobachtete 76986 Männer mit 19999 Todesfällen, 9391 Ausgetretenen und 47596 am Zähltermin Vorhandenen; ferner 4759 Frauen mit 1539 Verstorbenen, 900 Ausgetretenen und 2320 am Zähltermin Vorhandenen. Der Zähltermin war der 31. Dezember 1878. Untersucht ward die Sterblichkeit nach Alter und Geschlecht. Bestimmt wurde der Einfluß der Selektion und der Versicherungssumme, endlich die relative Häufigkeit der einzelnen Todesursachen. Ergänzt wurden

1) Betreffend die Manipulation wird kurz erwähnt, daß für solche Policen nur eine Karte ausgefertigt wurde, welche auf eine einzige Summe von Anfang bis Ende versichert blieben; trat jedoch eine Abänderung der Versicherungssumme ein, dann mußten so viele Zählkarten ausgestellt werden, als Änderungen statt hatten. Beispielsweise wurden von einer Person, welche vom Jahre 1860—1866 auf 3000 $, vom Jahre 1866—1868 auf 2500 $ und von da ab auf 800 $ bis zum Jahre 1873 versichert war, drei Karten, alle beginnend vom Jahre 1860 und zwar: 800 $ endigend mit dem Jahre 1873, 2500 $ endigend mit dem Jahre 1868 und 3000 $ endigend mit dem Jahre 1866 ausgestellt.

die Beobachtungen noch durch drei sehr wertvolle Monographien (v. Karup und Gollmer) betreffend die Mortalitätsverhältnisse des ärztlichen und geistlichen Standes und der Lehrer. Die neueste, gleichfalls von Karup durchgeführte Beobachtung erstreckte sich auf alle Erfahrungen der Versicherungsgesellschaft Gotha, welche mit dem Prämientermin 1896 endigten und umfaßt 150594 Eingetretene mit 46480 Sterbefällen. Die Messungsmethoden sowie die Behandlung der Storni sind identisch mit der bei der Sterblichkeitsmessung nach den englischen Gesellschaften 1863—1893. Es wurde die Sterblichkeit beobachtet: 1. nach Personen, 2. nach Summen, 3. nach Zugangs- und Geschäftsperioden von je 15 Jahren, 4. in verschiedenen Versicherungskombinationen (in den Todesfall und den gemischten Kapitalversicherungen). Rücksichtlich der Sterblichkeit für abgekürzte Versicherungen wurde insbesondere die Sterblichkeit für freiwillige und gezwungene Abkürzung besonders behandelt.

Die Tafeln der 23 deutschen Gesellschaften. Die Zähleinheit ist die Person, das Sterblichkeitsmaß das deutsche, die Manipulation die englische. Hergestellt wurden 12 Sterbetafeln:

Die Tafel	für untersuchte	Männer	M I	mit	2208256	Jahresbeob.	und 36944	Toten
„	„ „	Frauen	W I	„	678655	„	„ 10594	„
„	„ minderwertige	Männer	M II	„	404212	„	„ 7388	„
„	„ „	Frauen	W II	„	130717	„	„ 2267	„
„	„ „ ununtersuchte	Männer	M III	„	830335	„	„ 18152	„
„	„ „	Frauen	W III	„	910462	„	„ 16586	„
„	„ „ Knaben		M IV	„	135652	„	„ 1693	„
„	„ „ Mädchen		W IV	„	226010	„	„ 2902	„

ferner 4 Tafeln MW I, MW II, MW III, MW IV ohne Unterscheidung der Geschlechter.

Als Endtermin galt der 31. Dezember 1870; die Veröffentlichung erfolgte im Jahre 1883.

Die Tafeln der 4 französischen Gesellschaften. Zur Konstruktion der Tafel vereinigten sich die 4 Gesellschaften Générale, Union, Nationale und Phénix. Es wurde eine Tafel für Ablebensversicherungen AF (für Männer, Frauen und beide Geschlechter) und eine Tafel für Rentenversicherungen RF (für Männer, Frauen und beide Geschlechter) konstruiert. Das Material zur AF Tafel wurde mit 31. Dezember 1887, das der Tafel RF mit 31. Dezember 1889 geschlossen. Das Manipulationsverfahren war das französische. Zur Tafel RF trugen 121715 Karten über

244292 Beobachtungsjahre an Männern mit 16410 Todesfällen,
391617 „ „ Frauen „ 20506 „

zur Tafel *AF* 284775 Karten über

1408398 Beobachtungsjahre an Männern mit 18926 Todesfällen
382258 „ „ Frauen „ 3691 „

bei.

Die Sterbetafel der österreichisch-ungarischen Versicherungsgesellschaften. Dermalen ist die Konstruktion einer solchen Sterbetafel im Zuge. Dieselbe verdankt ihre Entstehung einer am 2. Dezember 1899 im Verein österreichisch-ungarischer Versicherungstechniker gegebenen Anregung. An ihr nehmen die sämtlichen in Österreich-Ungarn tätigen Gesellschaften mit ihren österreichisch-ungarischen Versicherten teil. Es wird einerseits nach Selektionen, andererseits nach Personen gezählt und die Sterblichkeit auf Grundlage des Gothaer Sterblichkeitsmaßes nach Alter, Geschlecht, Versicherungskombination und Versicherungsdauer nicht nur in jeder einzelnen Versicherungsgesellschaft, sondern in der Gesamtheit derselben untersucht. Das Material der Selektionszählung stützt sich auf 493741 Männer und 88213 Karten für Frauen. Bei der Personenzählung der Männer gelangten 410167 Karten zur Verarbeitung. Die Arbeiten dürften bereits im Jahre 1906 beendigt werden. Originär ist darin die Herstellung von dreimächtigen (Gothaer) Lebenden- und Totengesamtheiten, um den Einfluß der *Geburtszeit* auf die Sterblichkeit systematisch feststellen zu können. Als Vorläufer solcher Messung sind die Anlage der englischen Sterblichkeitstafeln in Terminen von je 30 Jahren und die Unterscheidung des Materiales der letzten englischen Tafeln in alten und neuen Bestand, sowie die jüngste Gothaer Untersuchung über die Sterblichkeit nach Geschäftsperioden anzusehen.

§ 27. Die Rentnertafeln. Außer den bereits oben erwähnten Rentnertafeln nach Finlaison, aus dem Materiale der vier französischen und sechzig englischen Gesellschaften wurde noch eine Reihe von anderweitigen, derartigen Tafeln konstruiert und zwar:

a) *Die Sterblichkeitstafel der preußischen Rentenversicherungsanstalt in Berlin.* Die betreffende Anstalt betreibt Rententontinen (die Zinsen von durch Personengruppen gleicher Altersklassen und gleicher Beitrittsjahre angelegten Kapitalien werden unter die Überlebenden derselben Gruppe verteilt und gehen beim Aussterben einer Personengruppe nach einem bestimmten Schlüssel auf die überlebenden Personengruppen über). Die Beobachtungen wurden den Jahren 1870—1874 entnommen und erstreckten sich auf die Mehrzahl der Einlagen der zuerst, d. h. in den Jahren 1839—1848 gebildeten Jahresgesellschaften.

Aus dem Beobachtungsmaterial gehörten der

I. Klasse	m. d. Beitrittsalter	0—11	u. d. Jahresgesellschaften	1839/48	3775 Einlagen
II.	„ „ „	12—23	„ „ „	1839/43	3766 „
III.	„ „ „	24—34	„ „ „	1839/40	6894 „
IV.	„ „ „	35—44	„ „ „	1839/43	9795 „
V.	„ „ „	45—54	„ „ „	„	4320 „
VI.	„ „ „	üb. 55 Jahre	„ „ „	„	2049 „

an.

Dieselben repräsentierten 14472 Personen mit 389714,5 Beobachtungsjahren und 6505 Sterbefällen. Gebildet wurden daraus nicht weniger als 4 Tafeln und zwar a) für Männer, b) für Unverheiratete weiblichen Geschlechts, c) für Frauen, d) für männliche und weibliche Personen.

Die im Jahre 1888 vorgenommene Tafelrevision bestätigte die Richtigkeit der Untersuchungen.

b) *Die englischen Rentnersterbetafeln vom Jahre 1883.* Die Tafeln wurden von Alexander Finlaison aus den Erfahrungen der Englischen Staatsrentenbank für den Zeitraum 1808—1875 berechnet. Das Material betrug 10929 Männer mit 8607 Sterbefällen und 19859 Frauen mit 14391 Todesfällen. Es wurde außer nach dem Alter noch nach dem Geschlechte und nach Vertragsdauern unterschieden. Durch die Sterbetafeln wurde übrigens im großen ganzen das Ergebnis der im Jahre 1825 abgeschlossenen Prüfung bestätigt.

c) *Die Sterblichkeitstafel der Altersrentenbank in Dresden.* Sie erscheint konstruiert aus dem Materiale der Bank von 1859—1889 und zwar nur aus 53154 Beobachtungsjahren und 730 Todesfällen. Bei dem Umstande, als die Resultate schon wegen des unzulänglichen Materiales unsicher waren, nahm man bloß die Ergebnisse zwischen den Altern 6—61 und lehnte sich von da ab an die Resultate der Preußischen Rentenanstalt an. Die Tafel unterscheidet weder nach Altern, noch nach Perioden des Beitrittes zur Versicherung.

d) *Die Deutsche Rentnertafel* beruht auf dem bis zum 31. Dezember 1889 reichenden Beobachtungsmaterial von 24 deutschen, 11 österreichischen und 3 schweizerischen Versicherungsanstalten betreffend die von ihnen versicherten unmittelbaren Renten. Das Gesamtmaterial betrug 16968 Personen mit 5537 Todesfällen (2078 Männern und 3459 Frauen). Die Tafel ist nach Geschlechtern getrennt. Auf Vertragsdauern wird keine Rücksicht genommen.

Aus den mancherlei Studien über die Rentenversicherungen hat sich ergeben:

1. Die Sterbenswahrscheinlichkeiten sind nach Vertragsdauern in den ersten fünf Abschlußjahren wesentlich verschieden. So be-

trägt die 1000fache Sterbenswahrscheinlichkeit bei Männern nach Finlaison:

im Alter	bei einer Vertragsdauer von Jahren					
	0	1	2	3	4 u. mehr	durchschnittlich
50	13,75	19,70	19,80	19,90	21,64	19,90
60	22,78	26,34	27,67	27,87	28,51	26,95
70	37,62	46,08	49,50	49,95	64,62	61,63
80	66,66	104,01	111,63	112,86	138,64	132,50

2. Der Unterschied zwischen Männer- und Frauensterblichkeit ist sehr erheblich. Gegenüber den obigen durchschnittlichen Sterbenswahrscheinlichkeiten für Männer beträgt die für Frauen im Alter 50, 60, 70, 80 bezw. 11,23, 20,50, 44,57, 115,34.

3. Die Sterbenswahrscheinlichkeiten der deutschen männlichen Rentner lehnen sich ziemlich enge an die der Tafel der 17 englischen Gesellschaften an.

§ 28. Die Invaliditätstafeln und Grundlagen der Unfallversicherung. Es gibt keine Geschichte der Invaliditätsmessung im Sinne der Geschichte der Sterblichkeitsmessung. Die bisher konstruierten Invaliditätstafeln wurden nämlich sämtlich nach der auf S. 62 erörterten Methode behandelt; es erscheint daher nur nötig, die dortigen Angaben noch durch Mitteilung der darnach konstruierten Tafeln und des Zählungsmateriales selbst zu ergänzen. Das weitaus bedeutendste Material lieferte

a) Der *Verein deutscher Eisenbahnverwaltungen.* Dasselbe wurde durch 22 Jahre (1868—1889) gesammelt und erfuhr die Bearbeitung von Wiegand (1868/69), Behm (1870—1883), Zimmermann (1884—1887), Zillmer (1888/89). Die ersten daraus abgeleiteten Tafeln von Behm umfassen die Beobachtungsjahre 1868/73 und untersuchen die Sterblichkeits- und Invaliditätsverhältnisse sämtlicher Eisenbahnbeamten mit 449854 Beobachtungsjahren Aktiver und 3048 Invaliditätsfällen; ferner mit 14256 Beobachtungsjahren Invalider und 867 Todesfällen; des weiteren noch gesondert eben dieselben Verhältnisse für das Zugpersonal an 111042 Beobachtungsjahren Aktiver mit 820 Invaliditätsfällen und 3453 Beobachtungsjahren Invalider mit 178 Todesfällen.

Ganz die gleiche Teilung des Materiales wurde bis zum Jahre 1876 fortgesetzt und für dieses Jahr nochmals die Vereinigung des Gesamtmateriales für die Jahre 1868/76 und des Zugpersonals für die Jahre 1870/76, jedoch ohne Bearbeitung vorgenommen. Kurz sei erwähnt, daß sich das Material damals auf 5885 Invaliditäts-

fälle aller Eisenbahnbeamten und 1577 Todesfälle aller invaliden Eisenbahnbeamten, sodann auf 1445 Invaliditätsfälle am Zugpersonal und 318 Todesfälle aus dem invalidisierten Zugpersonal erstreckte.

Die Teilung des Materiales, welche bis zum Jahre 1876 nur die Ausscheidung des Zugpersonales bezweckte, wurde fortab in 4 großen Gruppen und zwar A) Bahnbewachungspersonal, B) Zugbegleitungspersonal, C) Stationspersonal, D) übriges Personal durchgeführt. Die Statistik zeigt aber einen noch weiter gehenden Unterschied. Während nämlich vor dem Jahre 1876 bloß die Veränderungen der Aktiven in solche Individuen, welche a) invalide wurden, b) ohne Pension entlassen wurden, c) im Laufe des Jahres starben, beobachtet erscheinen, wurden seit dem genannten Jahre die Änderungen an Individuen beobachtet, welche a) wegen Invalidität ohne Pension entlassen wurden, b) aus anderen Ursachen ohne Pension entlassen wurden, c) wegen Invalidität mit Pension entlassen wurden, d) aus anderen Ursachen mit Pension entlassen wurden, e) starben, f) infolge Unfalles pensioniert wurden, g) infolge Unfalles starben.

Der Zusammenfassung des Materiales vom Jahre 1868/84 (bei den Sterbenswahrscheinlichkeiten Dienstunfähiger des Materiales 1877 bis 1885) verdankt man drei Invaliditätstafeln und zwar a) für sämtliche Eisenbahnbeamte, b) für das Fahrpersonal, c) für das Nichtfahrpersonal. Überdies hat Karup seine bekannte Tafel aus dem Material für das gesamte Eisenbahnpersonal aus den Jahren 1868/78 mit unabhängigen Wahrscheinlichkeiten konstruiert. Für besondere Gruppen, so für das Bahnbewachungspersonal, wurden noch aus dem Materiale der Jahre 1877—81, für das Bureaupersonal aus dem Materiale der Jahre 1882—1884, Invaliditätstafeln ausgearbeitet.

Das vom Jahre 1884 bis zum Jahre 1889 gesammelte Material wurde in noch viel weitergehender Teilung (Zugförderungsbeamte, Zugbegleitungsbeamte, Bahnbewachungs- und Unterhaltungsbeamte, Stationsbeamte, Beamte für den niederen Stationsdienst, Weichenwärter, Bureaupersonal) beobachtet und fand seine Berücksichtigung in den Tabellen von Benzin für das gesamte Eisenbahnpersonal. Schließlich ist noch zu erwähnen, daß in den letzten drei Jahren von Zillmer eine spezielle Untersuchung über das Personal der Eisenbahnarbeiter vorgenommen wurde.

Den Tabellen für das Zugpersonal der Jahre 1868—1884 liegen 534 247 Beobachtungsjahre mit 5163 Invaliditätsfällen, den Absterbeordnungen für das invalide Zugpersonal 26 044 Beobachtungsjahre mit 1483 Todesfällen, den analogen Tafeln für das Nichtfahrpersonal 1 590 907 Beobachtungsjahre mit 14 617 Invaliditätsfällen, ferner den

Absterbeordnungen für das invalide Nichtfahrpersonal 76 294 Beobachtungsjahre mit 4511 Sterbefällen zugrunde. Die Tabellen für das gesamte Eisenbahnpersonal gingen und zwar die Tafel der Invaliditätswahrscheinlichkeiten aus der Berücksichtigung von 2 125 154 Beobachtungsjahren mit 19 780 Invaliditätsfällen, die Sterbetafel der Invaliden aus 109 778 Beobachtungsjahren mit 6594 Sterbefällen hervor.

Die Tafel für das Bahnbewachungsmaterial fußt nur auf 3711, die für die Bureaubeamten gar nur auf 641 Invaliditätsfällen. An Eisenbahnarbeitern wurden im ganzen 1326 Invaliditätsfälle beobachtet.

b) Das *Material der Österreichischen Bergbruderladen* für die Jahre 1886/88 wurde von Kaan bearbeitet. Dasselbe erscheint nach dem Bergbau auf a) Steinkohle (samt Eisenstein und anderen Materialien), b) Braunkohle, c) Steinsalz und d) dem gesamten Hüttenbetrieb unterschieden.

Dem Materiale unter a) lagen 125 284,5 Beobachtungsjahre mit 48 Invaliditätsfällen wegen Verunglückungen im Dienste und 1649 anderweitigen Invaliditätsfällen, endlich 187 Todesfällen nach einem Unfalle; ferner 14 709 Beobachtungsjahre invalider Arbeiter dieser Kategorie mit 1216 Todesfällen zugrunde. Das Material unter b) zählte 76 366 Beobachtungsjahre mit 197 Invaliditätsfällen wegen Verunglückungen und 649 anderweitigen Invaliditätsfällen, endlich 156 Todesfällen nach Unfall; ferner 4649,5 Beobachtungsjahre invalider Arbeiter dieser Kategorie mit 300 Todesfällen. Das Material unter c) zählte 4000 Beobachtungsjahre mit 191 Invaliden und 3 Todesfällen nach einem Unfall, endlich 2459 Beobachtungsjahre invalider Bergarbeiter mit 157 Todesfällen. Das Material unter d) endlich umfaßte 74 711 Beobachtungsjahre mit 62 Invaliditätsfällen nach einem Unfalle und 954 Invaliditätsfällen nach anderen Ursachen, endlich 43 Todesfällen nach einem Unfalle; die Invaliden dieser Gruppe zählten 8813,5 Beobachtungsjahre mit 635 Todesfällen.

c) Zur Gewinnung *der Invaliditätstafel der deutschen Arbeiter* wurden einerseits die Ergebnisse der Berufsstatistik über die Lebenden, andererseits die eingetretenen Invaliditätsfälle verwendet. Bisher wurden zwei derartige Beobachtungen durchgeführt. Die eine stützt sich auf die Erhebungen bis zum Jahre 1894, die andere auf die Erhebungen der Jahre 1895/97. Nach den letzteren Erhebungen wurden am 14. Juni 1895 11 813 259 aktive Individuen gezählt; als zugehörige Invaliditätsfälle wurden aus den drei erwähnten Jahren die höchsten Zahlen der Invaliditätsfälle jedes Alters gewählt. Die Zahl der benützten Invaliditätsfälle aller drei Beobachtungsjahre betrug 175 990, die Summe der Höchstzahlen eines Jahres 64 388.

Vom theoretischen Standpunkt bedeuten diese Tafeln insofern einen wesentlichen Fortschritt, als zum erstenmale die Größe der Sterbenswahrscheinlichkeiten Invalider, genauer gesprochen, die Ausscheidewahrscheinlichkeiten aus dem Rentengenuß (also die Wahrscheinlichkeit, durch Todes- oder Reaktivierungsfall etc. aus dem Invalidenstock zu scheiden) ermittelt wurde. Die Beobachtung erfolgte nach Vierteljahren unter Befolgung nachstehenden Schemas:

Formular V.

Rentenbeginn	Im Kalender-Quartal des Rentenbeginns		Im Quartale des Rentenbeginns nach dem I. Quartal					
			I			II		
	Zugang	Abgang	Bestand	Zugang	Abgang	Bestand	Zugang	Abgang
1891 IV. Quartal								
1892 I. Quartal								
II. Quartal								
III. Quartal								
IV. Quartal								
1893								

Im ganzen wurden 65 994 Invalidenrentner, 216 430 Beobachtungsquartale und 10 679 Abgänge beobachtet. Die auch auf die Altersrenten ausgedehnten Beobachtungen ergaben 278 631 Beobachtungsjahre mit 25 984 Ausscheidungen. Die betreffenden Beobachtungen wurden in neuester Zeit wiederholt, und findet sich die diesbetreffende Publikation in den Amtlichen Nachrichten des Deutschen Reichsversicherungsamtes für das Jahr 1904 (§ 3).

d) Anderweitige Erfahrungen über den Bergbau verdankt man Caron, Küttner, Beckmann, Jahn. Die Unterschiede in den Beobachtungen entnimmt man der folgenden vergleichenden Zusammenstellung:

Lebensalter	Kaan (österr. Steinkohle, Eisenstein	Bruderladen) Hüttenbetrieb	Küttner preuß. Steinkohlenbergbau 1869/85	Beckmann, Saarbrücker Knappschaftsverein 1891/98	Jahn Knappschaftspensionskasse f. Sachsen
30	0,00238	0,00279	0,00600	0,00410	0,00740
40	690	620	1650	1430	01420
50	3242	2734	6650	12000	03901
60	11945	9936	19710	23500	19446
70	20076	16587	43230	40000	32290

In der Literatur begegnet man noch mannigfachen Untersuchungen über anderweitige Stände (Karup „Staatsdiener“, Zillmer „Metallarbeiter“, Wolf „Bühnenangehörige“ usf.)

Schließlich wäre noch zu erwähnen, daß Beobachtungen über die Abhängigkeit der Berufsinvalidität von Alter und Dienstzeit vom Verfasser an den Angestellten der Kaiser Ferdinands Nordbahn in Wien

im Wege der Aufbereitung eines entsprechend angelegten Zählkartenmateriales angestrengt wurden (Seite 249, 250).

Unfallversicherung. Für die private Versicherung bestehen dermalen noch keinerlei besondere technische Unterlagen. Die öffentliche Versicherung stellt gemäß ihren technischen Voraussetzungen die Durchschnittswahrscheinlichkeiten für alle Betriebe fest, durch einen Unfall a) getötet zu werden, b) dauernd invalide zu werden, c) vorübergehend invalide zu werden.

Außerdem wird das Gefahrenprozent, d. i. eine Verhältniszahl entwickelt, durch welche die Belastung jedes Betriebes aus einem Unfall charakterisiert sein soll, endlich eine Abfallsordnung der Unfallinvaliden, welche nach Alter allein oder nach Alter und Dauer der Invalidität abgestuft ist.

Für die Einführung der öffentlichen Versicherung im Deutschen Reiche waren viermonatliche Beobachtungen über die Unfälle in Deutschland während des Jahres 1881 maßgebend. In Österreich wurde die Unfallversicherung nach den Erhebungen aus den Berufsgenossenschaften der Reichs- und Staatsbetriebe Deutschlands, dann der Eisenbahnbetriebe für das Jahr 1886 geregelt.

Aus den Erfahrungen hat sich ergeben, daß nur die Sterbenswahrscheinlichkeit nach einem Unfall eine von allem Anbeginne der Einrichtung der Unfallversicherung konstante Zahl ist und pro Jahr 0,0007 beträgt, daß aber die Wahrscheinlichkeit der Erwerbsunfähigkeit sich erst geraume Zeit nach der Einrichtung stabilisiert.

So entfielen auf 10 000 Beobachtungen (in Österreich Vollarbeiter)

im Jahre	in Deutschland			in Österreich		
	Unfälle mit					
	Tod	vorübergehender Erwerbsunfähigkeit	dauernder Erwerbsunfähigkeit	Tod	vorübergehender Erwerbsunfähigkeit	dauernder Erwerbsunfähigkeit
1886	7,—	5,7	15,3			
1887	7,7	5,3	28,4			
1888	6,8	8,6	28,1			
1889	7,1	8,1	31,9	6,7	55,9	19,3
1890	7,3	9,8	36,5	6,6	70,8	25,1
1891	7,1	11,0	37,4	6,4	70,7	28,3
1892	6,5	11,4	38,5	6,9	74,5	34,5
1893	6,9	12,5	40,9	6,8	82,6	37,4
1894	6,5	16,2	39,8	6,8	87,4	40,5
1895	6,7	18,5	37,2	7,2	95,2	42,1
1896	7,1	23,8	36,3	7,0	102,7	37,9
1897	7,0	25,9	36,2	7,0	105,5	37,8
1898	7,3	27,5	36,3	7,3	108,6	41.7
1899	7,2	30,0	36,7	6,8	109,9	40,8
1900	7,4	30,6	36,6	6,7	113,4	42,8
1901	7,2	34,6	38,9	6,1	124,7	39,9

Über das Gefahrenprozent orientiert die nachstehende Zusammenstellung über normal eingerichtete Betriebe nach österr. Erfahrungen:

Porzellanfabriken 4, Baumwollwebereien und Buchdruckereien mit Motoren 6, Glasfabriken exklusive Tafelglasfabriken 9, Lederfabriken 16, Baumwollspinnereien 20, Papierfabriken 25, Kunstmühlen, Steinmetzereien 31, Maschinenziegeleien, Maschinenfabriken, Brauereien, Hochbau 39, Bessemer-, Thomas- und Martinstahlhütten 48, Zimmerer, Gerüstmacher 73, schweres Fuhrwerk, Steinbrüche 87.

Daß die Unfallswahrscheinlichkeit auch vom Alter abhängig sein müsse, ist mannigfach begründet worden. Als Wahrscheinlichkeit, durch einen Unfall invalide zu werden, wurde erhoben

für das Alter	bei der kgl. sächs. Knappschaftskasse	bei dem oberschlesischen Knappschaftsverein	bei den Eisenbahnbediensteten und zwar beim		bei Arbeitern der preußischen Eisenbahnen
			Zugpersonal	Nichtzugpersonal	
20	0,0016	0,0002	0,0002	0.0000	0,0080
30	0,0033	0,0013	0,0009	0,0001	0,0005
40	0,0050	0,0033	0,0023	0,0003	0,0010
50	0,0059	0,0079	0,0034	0,0004	0,0014
60	0,0064	0,0213	0,0041	0,0005	0,0032
70	0,0048	0,0144	0,0091	0,0008	0,0045
80	0,0048			0,0024	

§ 29. Die Krankenordnungen. Die für den Betrieb der Krankenversicherung notwendigen Beobachtungen erstrecken sich auf die nach Altern abgestuften Wahrscheinlichkeiten der Erkrankung, auf die in derselben Art differenzierte durchschnittliche Anzahl der Krankentage im Jahre, endlich, zur Berechnung der in der Versicherungstechnik häufig gebrauchten Reduktionsfaktoren für das abgestufte Krankengeld, auf eine Skala für die Dauer der Krankheiten. Derartige Beobachtungen wurden überaus zahlreich an den englischen Hilfskassen, an der Leipziger Versicherungsgesellschaft „Gegenseitigkeit", an den gegenseitigen Hilfsgesellschaften der Schweiz, an den deutschen Eisenbahnbeamten (im Auftrage des Vereins deutscher Eisenbahnverwaltungen) und endlich an den obligatorischen Krankenkassen Deutschlands und Österreichs angestellt. Als Ursachen der Krankheitsgefahr haben sich nebst Alter und Beruf noch 1. die Wirksamkeit der Krankenaufsicht, 2. die Lage des Arbeitsmarktes, 3. das Verhältnis des Krankengeldes zum mittleren Arbeitslohn, 4. der Umstand, ob der Beitritt freiwillig oder zwangsweise erfolgt, endlich 5. die Höhe des Reservefonds der Krankenkasse ergeben. In letzterer Beziehung erwies sich, daß bei stärkeren Reservefonds die Tendenz zu einer milderen Handhabung der Krankenaufsicht besteht.

Die ältesten englischen Untersuchungen von M. Neison beziehen sich auf die Erfahrungen von 79 schottischen Hilfskassen zwischen den Jahren 1751—1820. Die Zahl der durchschnittlichen Krankentage im Jahre war außerordentlich gering, weil die Unterstützung von der Bedürftigkeit abhängig gemacht wurde.

Dieser Tafel folgte die Untersuchung M. Neisons betreffend die englischen Hilfskassen. Das Material erstreckte sich auf 1147243 Beobachtungsjahre während der Periode 1836—40 und wurde nach ländlichen Distrikten, städtischen Distrikten und den Distrikten der großen Städte eingeteilt.

Die Beobachtungen Finlaisons über die englischen Hilfskassen zwischen den Jahren 1846—50 erstreckten sich auf 792930 Beobachtungsjahre, krankten aber an dem Umstande, daß die Unterstützungen bei chronischen Leiden ausgeschlossen waren.

Für sich allein hat die große Hilfskasse der „Werkmeister" von Manchester zwei Untersuchungen unter Ratkliffe und zwar aus den Beobachtungen zwischen 1856—60 und zwischen 1866—70 auf Grundlage von 1006272 bezw. 1321043 Beobachtungsjahren angestellt.

Weitere Untersuchungen rühren noch von der alten Körperschaft der Forstleute zwischen den Jahren 1871—75 über 1302166 Beobachtungen von Neison und endlich die im Jahre 1896 veröffentlichte Tafel Suttons über die englischen Hilfskassen. Diese letztere umfaßt 4565675 Beobachtungsjahre mit 8195461 Krankheitswochen.

Im Nachfolgenden wird noch eine kurze Übersicht über die Zahl der Krankentage im Jahre nach den erwähnten Erfahrungen gebracht:

Kasse	Altersklasse						
	20—30	30—40	40—50	50—60	60—65	65—70	70—75
Schottische Hilfskassen.....	4,1	4,7	6,8	12,1	20,1	47,0	
Englische „ 1836/40	6,1	6,9	10,4	19,0	37,1	70,7	118,8
WerkmeisterManchester1846/48	4,9	6,3	9,6	19,0	36,5	49,8	83,4
Englische Hilfskassen 1846/50.	6,9	7,2	9,4	14,0	22,0	32,8	53,6
WerkmeisterManchester1856/60	5,7	6,7	9,8	19,3	33,9	52,1	83,4
„ „ 1866/70	5,4	7,0	10,4	19,0	34,0	53,5	84,7
Forstleute 1871/75	5,9	7,4	10,9	19,5	33,0	56,6	84,6
Sutton.....	6,1	7,9	11,8	20,2	37,1	62,9	103,5

Die Erfahrungen der Leipziger Versicherungsgesellschaft wurden von Heym in dessen bekanntem Werke „25 Jahre Erfahrungen der Versicherungsgesellschaft *Gegenseitigkeit*" in Leipzig 1884 nieder-

gelegt. Die Heymschen Zahlen sind nach Geschlechtern getrennt und enthalten nebst den Krankentagen auch Übersichten über die Krankheitsdauern.

Die Erfahrungen der gegenseitigen Hilfsgesellschaften der Schweiz im Jahre 1880 wurden von Kinkelin herausgegeben (Bern 1887).

Die Reduktionsfaktoren berechnete Moser aus den Erfahrungen der bernischen kantonalen Krankenkasse (1884—1891).

Eine überaus eingehende Statistik wurde endlich aus den Erfahrungen der nach dem Gesetze vom 30. März 1888 betreffend die Krankenversicherung der Arbeiter eingerichteten österreichischen Krankenkassen während der Jahre 1891—1898 geliefert. Dieselbe erstreckte sich auf 6,3 Millionen Männer und 2 Millionen Frauen mit 3,7 Millionen Erkrankungen und 64,5 Millionen Krankentagen.

Die Ergebnisse sollen zugleich mit den Heymschen und Kinkelinschen Erfahrungen zusammengestellt werden.

Beobachtung	Alter 20	40	60	65	70
Heym, Männer	5,6	8,0	14,1	14,4	10,8
Kinkelin, Männer	5,8	6,7	13,7	16,4	19,5
Österreichische Statistik					
Bezirkskrankenk. Männer	5,7	7,8	13,3	15,6	18,8
Betriebs „ „	7,9	9,1	14,2	22,3	29,5
Genossenschafts „ „	4,8	6,8	13,4	16,9	21,3
Vereins „ „	7,1	9,0	15,5	20,8	27,6
Baugewerbe „	6,4	8,5	12,9	15,5	19,4
Eisenbahnen „	8,6	10,1	19,6	26,5	—
Metallwaren „	9,5	11,3	22,5	—	—
Textilwaren „	6,3	6,4	11,7	15,9	22,3
Zuckerfabriken „	8,2	9,0	14,6	17,9	22,6

Beobachtung	Alter 20	30	50	70
Heym, Frauen	6,1	6,1	7,6	20,8
Österreich. Statistik				
Frauen ohne Entbindungsgeld	6,3	7,9	11,5	21,7
Frauen mit Entbindungsgeld	8,6	12,1	11,6	21,7
„ Textilindust.[1])	7,3	8,7	11,6	24,2
„ Tabakfabrik.[1])	7,8	11,4	13,4	—

[1]) Ohne Entbindungsgeld.

§ 30. Die Heiratstafeln. In der Versicherungstechnik werden Heiratstafeln verschiedener Art verwendet, und zwar Tafeln, für a) die Wahrscheinlichkeit, in einem bestimmten Alter zu heiraten, b) den Altersunterschied zwischen den Ehegatten für jedes Alter der Verehelichung, c) die Wahrscheinlichkeit, mit Frauen der verschiedenen Alter verheiratet zu sein. Die Tafeln a und b erscheinen überdies darnach differenziert, ob die Beobachtungen an Junggesellen oder Witwern angestellt werden.

Über die Wahrscheinlichkeit der Männer, zu heiraten, hat Küttner die folgende Zusammenstellung (in der Zeitschrift des kgl. sächs. stat. Bureaus vom Jahre 1885) veröffentlicht:

Beobachtungsmaterial	Familienstand	Wahrscheinlichkeit, sich im nächsten Jahre zu verheiraten Altersstufe						
		21—25	26—30	31—35	36—40	41—45	46—50	51—60
Englischer Adel	ledig	0,0497	0,0802	0,0727	0,0562	0,0362	0,0182	0,0107
	verwitw.	0,1571	0,1760	0,1319	0,1069	0,0995	0,0787	0,0518
Niederlande 1855/59	ledig	0,0466	0,1067	0,1137	0,0788	0,0515	0,0286	0,0130
	verwitw.	0,2356	0,3342	0,3322	0,2562	0,1832	0,1063	0,0469
Belgien 1851/60	ledig	0,0386	0,0810	0,0778	0,0589	0,0379	0,0233	0,0092
	verwitw.	0,4978	0,4578	0,3598	0,2684	0,1567	0,0871	0,0359
Frankreich 1856/60	ledig	0,0566	0,1167	0,1193	0,0848	0,0375		0,0158
	verwitw.	0,2594	0,2583	0,2433	0,1784	0,0839		0,0369
Italien 1870/78	ledig u. verwitw.	0,0760	0,1274	0,1101				
Oldenburg	ledig	0,0222	0,1084	0,1551	0,1146	0,0765	0,0286	0,0105
	verwitw.	0,4667	0,4442	0,4297	0,3431	0,2442	0,1440	0,1121
Sachsen 1880/81	ledig u. verwitw.	0,1265	0,1770	0,1401	0,1100	0,1043	0,0756	0,0429
Sachsen: Steinkohle Erzbau	ledig u. verwitw.	0,122	0,274	0,242	0,196	0,215	0,129	0,122
		0,107	0,288	0,257	0,188	0,140	0,134	0,088

Als mittlere Altersdifferenzen zwischen den Ehegatten werden von Küttner für Sachsen angegeben

für die Heiratsalter von Männern	19	20	21	22	23	24	25
Jahre	—2,09	—1,45	—0,71	—0,19	0,26	0,92	1,48

für die Heiratsalter von Männern	30	35	40	45	50
Jahre	3,99	5,84	7,60	9,18	10,94

Tafeln für die Altersverteilung der Verehelichten werden aus jeder Volkszählung abgeleitet. Die Zahlen weisen allenthalben eine außerordentliche Stabilität auf.

Dritter Abschnitt.

Die Deutung der statistischen Maßzahlen.

§ 31. Die statistische Wahrscheinlichkeit (Vorbemerkungen). Der Begriff der mathematischen Wahrscheinlichkeit hat mit dem der statistischen Wahrscheinlichkeit a priori nichts gemein. Die *mathematische Wahrscheinlichkeit* ist ein Bruch, in dessen Nenner die Anzahl der für ein rein zufälliges Ereignis möglichen, in dessen Zähler die diesem Ereignisse günstigen Fälle stehen. Das rein zufällige Ereignis ist jedoch dadurch bestimmt, daß jeder Fall die gleiche Eintrittsmöglichkeit (die *Chancengleichheit*) besitzt; daß diese Möglichkeit in fortgesetzter Zahl der Versuchsfälle unverändert (*konstant*) bleibt; daß der Eintritt irgend eines Falles für den Eintritt eines anderen Falles nicht bestimmend ist (also *Unabhängigkeit* zwischen den Versuchsfällen besteht). Diese Grundbedingungen der mathematischen Wahrscheinlichkeit lassen sich beispielsweise im Spiele mit Würfeln von gleichen Reibungsverhältnissen an den Flächen und Kanten und bei Identität des theoretischen und physikalischen Schwerpunktes, ferner im Urnenspiel bei gründlicher Mischung und gleichen, d. h. wenigstens für das Gefühl indifferenten Eigenschaften der Kugeln beobachten.

Die *statistische Wahrscheinlichkeit* ist, wie schon im § 18 hervorgehoben wurde, ein Bruch, in dessen Nenner die Zahl der Beobachtungsfälle zur Konstatierung einer bestimmten Veränderung, in dessen Zähler die Zahl der Fälle steht, in welchen die Veränderung binnen der Zeiteinheit eintritt. Die statistische Erscheinung ist ein zufälliges Ereignis nur, weil sich jene Beobachtungsfälle a priori nicht angeben lassen, an welchen sich die Veränderung vollzieht, auch der Bruch keinen exakten Wert annimmt; doch läßt sich nachweisen, daß für keinen einzigen Fall der statistischen Wahrscheinlichkeit die Grundbedingungen der mathematischen Wahrscheinlichkeit, (also Chancengleichheit, Konstanz und Unabhängigkeit) vollständig erfüllt sind.

Die Chancengleichheit. In Rücksicht der *Sterbenswahrscheinlichkeit* kann ebensowohl für die Leben der *allgemeinen Bevölkerung* als für die *ausgelesenen* Leben nachgewiesen werden, daß Chancengleichheit für die bisher beobachtete Differenzierung der Sterblichkeitsursachen nicht besteht. Die Sterblichkeitstafeln für beiderlei Leben sind ohne genaue Unterscheidung der sozialen Lage (des Berufes, des Wohnortes, der Einkommensverhältnisse) der Massen konstruiert; und doch beeinflußt die erwähnte Ursache die Sterblichkeit wesentlich. Von den mannigfachen beweiskräftigen Beobachtungen werden hierüber die folgenden angeführt.

Th. Sörensen hat die dänische Stadtbevölkerung in drei Gruppen zerlegt. In der ersten hat er u. a. Arbeiter, Gesinde, Personen in Armenpflege; in der zweiten subalterne Beamte und Offiziere, Lehrer, Kontoristen, Handelsgehilfen, Kleinhändler, Handwerksmeister; in der dritten höhere Beamte und Offiziere, Ärzte, Anwälte, Großhändler, Rentiers zusammengefaßt. Diese Teilung führte er nun durch, indem er die offizielle Volkszählung von 1870 und die Totenscheine von 1865 bis 1874 bearbeitete. Im ganzen lagen für Kopenhagen 20847 Todesfälle und für die Provinzialstädte 22129 Todesfälle vor. Es ergaben sich die nachstehenden Sterblichkeitskoeffizienten:

Von 10000 Personen starben jährlich

im Alter	in Kopenhagen			in den Provinzialstädten		
			Männer			
	I. Gruppe	II. Gruppe	III. Gruppe	I. Gruppe	II. Gruppe	III. Gruppe
20—25	79	76	40	73	64	–
25—35	96	73	58	75	61	61
35—45	191	102	92	133	85	66
45—55	356	173	159	245	156	122
55—65	642	365	312	382	287	254
65—75	1060	725	565	790	653	533
			Frauen			
20—25	72	59	44	51	72	66
25—35	77	66	80	79	82	72
35—45	134	84	78	98	79	75
45—55	264	97	104	135	105	87
55—65	380	163	174	238	168	175
65—75	771	385	433	546	461	347

Es betrug nach den Beobachtungen der Gothaer Lebensversicherungsbank die mittlere Lebensdauer:

im Alter	im Durchschnitte aller Berufe	für Ärzte	für protestantische Geistliche	für Elementarlehrer	für Gymnasiallehrer
40	26,88	25,50	28,74	28,03	28,50
50	19,43	18,55	20,62	20,29	20,75
60	12,88	12,89	13,41	13,35	13,73
70	7,81	7,70	7,80	7,85	8,07

Daraus kann man schließen:

a) *Dermalen sind in den Gruppen angenommen gleicher Sterbenswahrscheinlichkeit die Unterschiede der Chance außerordentlich groß.*

b) *Vollständige Chancengleichheit zu erreichen, dürfte auch künftigen Beobachtungen nicht gelingen, da die Gleichheit der sozialen Lage kaum begrifflich, viel weniger aber noch ziffernmäßig erfaßbar ist.*

Ähnliche Untersuchungen lassen sich für die Invaliditäts- und Krankheitswahrscheinlichkeit bezw. die in einem Jahre zu erwartenden Krankheitstage, die Heirats- und andere Wahrscheinlichkeiten anstellen, zumal alle die genannten Wahrscheinlichkeiten in noch viel höherem Grade als die Sterbenswahrscheinlichkeit vom Berufe abhängig sind.

Beim Geschlechtsverhältnis der Geborenen sind die in verschiedenen Gruppen beobachteten Wertunterschiede geringer, wie bei den übrigen Wahrscheinlichkeiten. Ganz verschwinden sie nicht. Beispielsweise beträgt die Zahl der auf 100 Mädchen kommenden Knaben im Mittel für das Deutsche Reich 106,2, bei den Totgeborenen 128,3, bei den Lebendgeborenen 105,2, bei den Unehelichen 104,7, bei den Lebendgeborenen in Preußen, Bayern, Sachsen, Württemberg, bezw. 105,4, 105,4, 104,7, 104,1 (Georg v. Mayr, Statistik und Gesellschaftslehre. II. Teil).

Die Konstanz der statistischen Wahrscheinlichkeiten. Daß die statistischen Massenerscheinungen keinerlei Konstanz aufweisen, wurde bereits in § 3 an Beispielen über die Sterblichkeit und Invalidität gezeigt. Selbst im Gebiete des Geschlechtsverhältnisses der Geborenen steht die Konstanz nicht außer Frage. So wäre nach dem Berichte des Registrar general der Knabenüberschuß von England und Wales in den Jahren 1844 und 1845 bis zum Jahre 1893 von 106,4 bezw. 105 auf 104 zurückgegangen. Die erst erwähnte Zahl sei nur noch im Jahre 1885 erreicht worden. (Siehe auch das Beispiel für Österreich, S. 148).

Die Unabhängigkeit der statistischen Ereignisse. Es ist eine bekannte Tatsache, daß die statistischen Ereignisse vielfach voneinander abhängen. So wird jede ansteckende Krankheit, welche bei *einer* Person auftritt, alle mit ihr verkehrenden Personen bedrohen. Ist die Wahrscheinlichkeit, an einer solchen zu sterben $^1/_n$, dann wird die Wahrscheinlichkeit zweier Personen, an ihr gleichzeitig zu sterben, nur dann $^1/_{n^2}$, wenn die Personen zur Zeit der Erkrankung der einen mit einander weder mittelbar noch unmittelbar in Berührung kommen. In gleicher Weise erscheint die Lebensdauer eines Ehe-

gatten wesentlich durch die des anderen bedingt. Beim Ausbruch eines Brandes ist die Wahrscheinlichkeit der benachbarten Häuser, in Brand zu geraten, außerordentlich groß.

Man hat die Abhängigkeit der Sterbenswahrscheinlichkeiten vom Zivilstande häufig untersucht und ist beispielsweise zu den folgenden Ergebnissen (für Bayern 1881/90) gelangt:

Von 1000 Lebenden starben jährlich

	Männer				Frauen			
Alter	Ledige	Verheiratete	Verwitwete	Geschiedene	Ledige	Verheiratete	Verwitwete	Geschiedene
40—45	20,0	11,0	25,1	27,8	12,3	11,3	13,5	13,5
45—50	23,8	14,8	28,2	45,0	15,7	11,8	14,4	17,1
50—55	29,8	19,5	31,4	37,0	20,6	15,7	19,1	23,0
55—60	38,8	26,5	37,5	44,7	26,4	22,5	26,3	29,0
60—65	55,1	38,3	52.4	68,6	41,1	35,9	40,6	47,6
65—70	75,9	57,4	72,5	87,0	60,5	56,3	61,5	90,6

Die Frage übrigens, ob eine erkannte Abhängigkeit in der Rechnung als solche zu berücksichtigen ist, ja ob überhaupt eine Abhängigkeit besteht, ist nicht selten nur schwer zu entscheiden. Diesbezüglich soll auf zwei Fälle verwiesen werden:

1. Als abhängig sind Ereignisse insofern zu betrachten, als ein Ursachenkomplex existiert, welcher bei ihnen tätig sein muß, bei den andern gleichartigen Ereignissen aber nicht vorkommt. Das Entnehmen einer Kugel aus einer Urne wird nur dann eine Folge für das Entnehmen einer bestimmten anderen Kugel aus derselben Urne nach sich ziehen, wenn die Kugeln in irgend einer Art verbunden sind. Ebenso wird die Wahrscheinlichkeit der Invalidisierung für zwei Arbeiter, welche in derselben Grube tätig sind, nur insofern als abhängig zu bezeichnen sein, als es Ursachen der Invalidisierung gibt, welche aus der Arbeit in eben dieser Grube wirksam werden. Die Wahrscheinlichkeit, nicht etwa durch einen Unfall oder durch Ausströmen von Gasen in dieser Grube, sondern aus anderweitigen Ursachen invalide zu werden, ist für beide Arbeiter dem Produkte der Wahrscheinlichkeiten jedes einzelnen, an diesen invalide zu werden gleich, also auch gleich der Wahrscheinlichkeit der Invalidisierung zweier Arbeiter, welche in getrennten Gruben arbeiten.

Nennt man beispielsweise die Anzahl gleichmöglicher Fälle, welche zur Invalidität aus sonstigen Ursachen führen m, welche aus den Ursachen der Grube zur Invalidität führen n, welche endlich in beiden Fällen zur Invalidität nicht führen M bezw. N, dann ist die Wahrscheinlich-

keit der beiden Arbeiter, aus den ersteren Ursachen gleichzeitig invalide zu werden $w^2 = \frac{m^2}{(m+M+n+N)^2}$; die Wahrscheinlichkeit jedoch, aus den Ursachen der Grube invalide zu werden, nahezu $w^1 = \frac{n}{m+M+n+N}$, sohin endlich die Wahrscheinlichkeit überhaupt gleichzeitig invalide zu werden:

$$\frac{m^2}{(m+M+n+N)^2} + \frac{n}{m+M+n+N} = \frac{(m+n)^2 + (M+N-m)\,n}{(m+M+n+N)^2}.$$

Die Abhängigkeit muß in der Rechnung nur dann berücksichtigt werden, wenn die Wahrscheinlichkeit für die Zahl der Verursachungen n, welche den gemeinsamen Eintritt des Ereignisses mit Notwendigkeit nach sich ziehen, die Größenordnung von w^2 erreicht.

2. Der Eintritt gewisser, das Ereignis begünstigenden Bedingungen, von welchen alle Fälle gleichmäßig betroffen werden, ist von vornherein als Abhängigkeit überhaupt nicht aufzufassen.

Die Versicherungsgesellschaften pflegen die Auszahlungen der Versicherungssummen im Todesfalle innerhalb der ersten 3—5 Jahre nach Vertragsabschluß von gewissen besonderen Bedingungen abhängig zu machen; so darf der Tod nicht durch Selbstmord oder Zweikampf oder auf einer außereuropäischen Reise eintreten; die Angaben des Antrages müssen richtig und vollständig sein. Solche Versicherungsbedingungen werden zweifellos einen gewissen Einfluß auf die Größe der Sterbenswahrscheinlichkeiten nehmen. Eine Abhängigkeit im Sinne der wechselweisen Beeinflussung der Ereignisse ist dies aber nicht; die Folge ist, daß man *derart* abhängige bezw. beeinflußte Ereignisse ganz wohl durch (unabhängige) Wahrscheinlichkeiten, welche unter dem Einfluß solcher Bedingungen entstanden sind, bemißt.

Eine Abhängigkeit der Ereignisse zufolge solcher Versicherungsbedingung besteht aber doch insofern, als die Möglichkeit berücksichtigt wird, daß ein Individuum sich in seinen Entschließungen rücksichtlich Selbstmordes oder Zweikampfes beeinflussen läßt und das mit ihm verbundene, gleichfalls versicherte Individuum (der Ehegatte) für sich gewisse, das Versicherungsverhältnis beirrende Konsequenzen zieht.

Mit den bisherigen Erörterungen ist allerdings die Frage der Existenz mathematischer Wahrscheinlichkeiten im Gebiete der Statistik im negativen Sinne entschieden; nicht aber die Frage, ob bei einem statistischen Ereignis die 3 Grundbedingungen eines rein zufälligen Ereignisses in derartiger *Näherung* zutreffen, daß man *praktisch* die

beiden Wahrscheinlichkeiten mit einander identifizieren kann. Diese Erkenntnis ist aber für die Statistik und ihre Anwendungen von größtem Werte, weil hierdurch über die Gestaltung statistischer Verhältnisse eine bestimmte Anschauung gewonnen wird, ferner die statistischen Wahrscheinlichkeiten ein bekanntes Rechnungsschema, das der mathematischen Wahrscheinlichkeiten, möglich machen, endlich sich daraus die Grundbedingungen für eine gesunde Entwickelung des Versicherungswesens ergeben.

Ob und in welchen Fällen eine solche Übereinstimmung der beiden Wahrscheinlichkeiten vorhanden ist, läßt sich für keinen einzigen Fall durch Spekulation, sondern immer *nur* durch das Experiment entscheiden. Zu diesem Behufe werden in den beiden nächsten Paragraphen die Folgerungen erörtert, welche sich aus der Existenz der reinen Wahrscheinlichkeit oder einer Störung in den Grundbedingungen derselben für die Beobachtungen (einen vielfachen Versuch aus einer solchen) ergeben; sodann wird die Frage beantwortet, in wie weit umgekehrt aus dem Vorhandensein von Kriterien für die reinen Wahrscheinlichkeiten auf die Existenz dieser zurückgeschlossen werden könne; endlich werden Methoden gesucht, nach welchen die Identität einer statistischen mit einer mathematischen Wahrscheinlichkeit festzustellen ist.

Schließlich sollen die Wahrscheinlichkeitsfunktionen für extensive Maßzahlen erörtert werden.

§ 32. Die Eigenschaften der mathematischen Wahrscheinlichkeiten.

1. Die mathematischen Wahrscheinlichkeiten befolgen den Bernouillischen Satz. Derselbe lautet: Wenn die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Ereignisses p und für das Nichteintreffen eines Ereignisses q ist, dann wird bei n Versuchen über das Ereignis dasselbe jede beliebige, zwischen o und n gelegene Anzahl von Malen eintreffen bezw. nicht eintreffen können. Am meisten Wahrscheinlichkeit hat es für sich, daß das Ereignis np-mal eintrifft. Diese Wahrscheinlichkeit ist $\frac{1}{\sqrt{2npq\pi}}$ und daher bei großem n nur gering.

Die Wahrscheinlichkeit, daß das Ereignis irgend eine zwischen

$$np + \varrho\sqrt{2npq} \quad \text{und} \quad np - \varrho\sqrt{2npq}$$

gelegene Anzahl von Malen eintrifft, ist durch den Wert

$$W_\varrho = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\varrho e^{-t^2} dt + \frac{e^{-\varrho^2}}{\sqrt{2npq\pi}} \qquad \text{(I)}$$

gegeben. Der Wert des in der Formel vorkommenden (Krampschen) Integrales ist mit einer für die statistischen Untersuchungen genügenden Genauigkeit im Anhange II abgedruckt.

Zusatz. Für sehr große n, also in allen Beobachtungen der Statistik, reduziert sich W_ϱ auf $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\varrho e^{-t^2}dt$, weil das Zusatzglied sehr klein bleibt. In solchem Falle ist die Wahrscheinlichkeit für die gleiche Abweichung beiderseits vom wahrscheinlichsten Werte (also für $+\varrho\sqrt{2npq}$ und für $-\varrho\sqrt{2npq}$) gleich groß. Die Hälfte der Abweichungen vom wahrscheinlichsten Wert (also alle Fehler bis zur Größe des sogenannten wahrscheinlichen Fehlers) findet man für ϱ, welche W_ϱ zu $\frac{1}{2}$ machen, d. h. für $\varrho = 0{,}4769$. Für $\varrho = 6 \cdot 0{,}4769 = 2{,}86$ wird $W_\varrho = 0{,}99995$; d. h. man kann 1 gegen 20000 wetten, daß die Abweichung des Ergebnisses vom wahrscheinlichsten Werte nicht den sechsfachen wahrscheinlichen Fehler überschreiten wird.

2. Wenn man n Versuche über den wahrscheinlichsten Wert der Wahrscheinlichkeit p für das Eintreffen eines Ereignisses, q für das Nichteintreffen dieses Ereignisses anstellt, sodann die Versuchszahl n in s Serien zu je v Versuchen teilt, derart, daß $n = s.v$ und wenn endlich p_1 bezw. q_1 die wahrscheinlichsten Werte der Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen und Nichteintreffen in der ersten, $p_2 q_2$ die wahrscheinlichsten Werte der Wahrscheinlichkeit in der zweiten, allgemein $p_i q_i$ die wahrscheinlichsten Werte in der i-ten Versuchsserie sind, dann besteht die Beziehung

$$\sqrt{\frac{s-1}{[(p_i - p)^2]}} = \sqrt{\frac{v}{pq}}, \tag{II}$$

worin die Klammer auf der linken Seite der Gleichung statt der Summe über alle $p_1, p_2, \ldots, p_n$ gebraucht ist.

Beweis. Die Wahrscheinlichkeit der Abweichung vom wahren Werte der Wahrscheinlichkeit w um die Größe ξ ist bekanntlich

$$\sqrt{\frac{n}{2w(1-w)\pi}}\, e^{-\frac{n\xi^2}{2w(1-w)}}.$$

Daraus folgt für die Präzisionsmaßzahl *in der ganzen Versuchsreihe* ein Wert $\sqrt{\frac{n}{2w(1-w)}}$ und wenn zwischen dem wahrscheinlichsten und wahren Wert die Beziehung $w = p + \varepsilon$ besteht, $\sqrt{\frac{n\left(1 - \frac{\varepsilon(1-2p)}{p(1-p)}\right)}{2p(1-p)}}$ oder für genügend kleine ε auch $\sqrt{\frac{n}{2pq}}$. In Analogie dieser Er-

wägungen ergibt sich für die Präzisionsmaßzahl in *jeder Versuchsserie* $\sqrt{\frac{v}{2pq}}$.

Man kann die Präzisionsmaßzahl jeder Serie auch in anderer Art nachweisen. Nach der Fehlertheorie entwickelt sie sich aus den wahrgenommenen Abweichungen der Serienwahrscheinlichkeiten vom wahren Werte der Wahrscheinlichkeit durch die Formel

$$h = \sqrt{\frac{s}{2[(p_i - w)^2]}},$$

aus den Abweichungen dieser Wahrscheinlichkeiten vom wahrscheinlichsten Wert der Wahrscheinlichkeit durch die Formel

$$h = \sqrt{\frac{s-1}{2[(p_i - p)^2]}}.$$

Die Gleichstellung der beiden, durch die wahrscheinlichsten Werte der Wahrscheinlichkeiten ermittelten Werte von h führt unmittelbar zur Behauptung.

Zusatz. Wenn eine Anzahl von Versuchen auf mehrere Arten in Versuchsgruppen mit gleicher Anzahl von Einzelversuchen zerlegt wird und bei zweifacher Zerlegung als Wahrscheinlichkeiten in den ersten Gruppen (s an der Zahl) $p_1, p_2 \cdots p_s$; in den zweiten Gruppen (s' an der Zahl) $p_1', p_2' \cdots p_s'$ resultieren, dann besteht

$$\sqrt{\frac{s}{v[(p_i - w)^2]}} = \sqrt{\frac{s'}{v'[(p_i' - w)^2]}}.$$

Aus dem Bestande der Gleichung folgt, daß die mittleren Fehler der beiden Versuchsgruppen den Quadratwurzeln der Versuchszahlen in den einzelnen Gruppen verkehrt proportional sind.

Ideell muß für $s' = 1$ dann auch bestehen

$$\sqrt{\frac{s}{[(p_i - w)^2]}} = \sqrt{\frac{v}{n(p - w)^2}}.$$

3. Für den Fall, als die Anzahl der Beobachtungen in den einzelnen Gruppen einer Serie nicht gleich ist, besteht die Beziehung:

$$\sqrt{\frac{s}{[v_i(p_i - w)^2]}} = \sqrt{\frac{1}{pq}}, \qquad \text{(III)}$$

wenn p_i die Serienwahrscheinlichkeit, v_i die Zahl der Versuche in jeder Serie und s die Serienzahl bedeutet. Diese Gleichung kann man auch unter Benützung der wahrscheinlichsten Werte der Wahrscheinlichkeit ausdrücken, wie folgt:

$$\sqrt{\frac{s}{\left[v_i\left(1+\frac{v_i}{n}\right)(p_i-p)^2\right]}}=\sqrt{\frac{1}{pq}} \qquad \text{(IV)}$$

oder endlich wenn v_i in allen Serien gegen n klein bleibt,

$$\sqrt{\frac{s}{[v_i(p_i-p)^2]}}=\sqrt{\frac{1}{pq}}. \qquad \text{(IV')}$$

Wenn die v_i sämtlich gleich sind, geht diese Gleichung wieder in die Gleichung II über.

Beweis. Für die Wahrscheinlichkeit in der ersten Serie folgt ideell $\frac{1}{(p_1-w)^2}=\frac{v_1}{pq}$ oder $pq=v_1(p_1-w)^2$ und hieraus allgemein

$$pq=v_i(p_i-w)^2.$$

Wenn in der letzten Gleichung für $i=1, 2, \cdots s$ eingesetzt und summiert wird, erhält man $spq=[v_i(p_i-w)^2]$.

Um in der letzten Gleichung für w den Wert p zu erhalten, substituiert man nach bekanntem Vorgange für $p_i-w=p_i-p+p-w$.

Quadriert man diese Gleichungen beiderseits, multipliziert mit v_i, bildet die sämtlichen möglichen Gleichungen für $i=1, 2, \cdots s$ und summiert über alle i, dann erhält man einerseits

$$[v_i(p_i-w)^2]=[v_i(p_i-p)^2]+(p-w)^2[v_i].$$

Multipliziert man dieselbe Gleichung unmittelbar mit v_i, bildet die sämtlichen möglichen Gleichungen durch Substitution von $i=1,2,\cdots s$, summiert sodann über alle i und quadriert, erhält man andererseits

$$[v_i^2(p_i-w)^2]=(p-w)^2[v]^2.$$

Aus dem Vergleiche der beiden letzten Beziehungen folgt sodann

$$[v_i(p_i-w)^2]=[v_i(p_i-p)^2]+\frac{[v_i^2(p_i-w)^2]}{[v]}, \qquad \text{(V)}$$

oder wenn man im zweiten Gliede auf der rechten Seite der Gleichung kurzer Hand für $v:p$ einsetzt,

$$[v_i(p_i-w)^2]=\left[v_i(p_i-p)^2\left(1+\frac{v_i}{[v]}\right)\right].$$

4. Wenn die Größe der beobachteten Fehler der Größe der nach dem Bernouillischen Theorem erwarteten Fehler gleichkommt, pflegt man die statistische Erscheinung als von normaler Dispersion zu bezeichnen. Sind die Beobachtungsfehler größer, wie bei der normalen Präzision, demnach die auf Grund derselben berechneten Präzisionsmaßzahlen kleiner, als die nach dem Bernouillischen Satze berechneten, dann spricht man von hypernormaler, im Gegenfalle von subnormaler Präzision.

Es besteht demnach für die
normale Dispersion:

$$\sqrt{\frac{s-1}{[p_i-p_j^2]}} = \sqrt{\frac{r}{pq}}, \qquad (V_1)$$

hypernormale Dispersion:

$$\sqrt{\frac{s-1}{[p_i-p_j^2]}} < \sqrt{\frac{r}{pq}}, \qquad (V_2)$$

subnormale Dispersion:

$$\sqrt{\frac{s-1}{[p_i-p_j^2]}} > \sqrt{\frac{r}{pq}}, \qquad (V_3)$$

bezw. für die Beobachtungsreihen mit ungleicher Anzahl der Einzelbeobachtungen:

$$\sqrt{\frac{s}{\left[v_i\left(1+\frac{v_i}{n}\right)p_i-p^2\right]}} \leqq \sqrt{\frac{1}{pq}}.$$

Nennt man nun das Produkt der Ausdrücke auf der linken Seite der Gleichungen V_1 bis V_3 mit $\frac{1}{\sqrt{2}}$, wie üblich die *empirische* oder *physikalische*, das Produkt der rechten Seite mit demselben Faktor die *theoretische* oder *kombinatorische* Präzisionsmaßzahl, dann besteht der Satz: *Für den Fall normaler Dispersion sind die physikalische und kombinatorische Präzisionsmaßzahl gleich; für den Fall übernormaler Dispersion ist die erstere kleiner, für den Fall unternormaler Dispersion größer als die letztere* (Kriterium von Lexis).

Es ist üblich geworden, nicht den Vergleich zwischen den obigen Quadratwurzelwerten zu ziehen, sondern unmittelbar den Wert des Verhältnisses $\sqrt{\left[v_i\left(1+\frac{v_i}{n}\right)(p-p_i)^2\right]} : s : \sqrt{pq}$ zu untersuchen. Man nennt das Verhältnis nach Dormoy den Divergenzkoeffizienten. Im Falle der Divergenzkoeffizient 1 ist, wird man der Erscheinung eine normale, falls er kleiner als 1 ist, eine subnormale, im Gegenfalle eine übernormale Dispersion zuschreiben.

§ 33. Die Abänderung des Bernouillischen Theorems bei Störung der Grundbedingungen für die reine Wahrscheinlichkeit. Die Voraussetzungen für das Bernouillische Theorem werden irritiert durch die Störung der

a) *Chancengleichheit. Das Bernouillische Theorem gilt auch für wahrscheinliche Erscheinungen, bei welchen die Chance für den Eintritt des Ereignisses bei den einzelnen Versuchsfällen verschieden ist.* Man

nennt ein Ereignis, bei welchem die *einzelnen möglichen Ergebnisse* verschiedenen Wahrscheinlichkeiten unterliegen, die Wahrscheinlichkeit des Durchschnittes in der Gesamtheit der möglichen Ergebnisse jedoch von einem Versuch zum andern unverändert bleibt, ein solches von konstantem Mittelwert (nach Bortkiewicz von konstant zusammengesetzter Durchschnittswahrscheinlichkeit). Das Schema eines solchen wird durch die Mischung von Kugeln schwarzer und weißer Farbe in einem Urnenkomplex dargestellt, sofern ϱ_1 Urnen diese Mischung im Verhältnisse $p_1 q_1$, ϱ_2 Urnen im Verhältnisse $p_2 q_2$, allgemein ϱ_i Urnen im Verhätnisse $p_i q_i$ aufweisen und die bei jedem Versuche gezogene Kugel in derselben Urne reponiert wird.

Bezeichnet man sodann unter $\varrho_i : (\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_n) = k_i$, dann ist die beliebige Wahrscheinlichkeit eines σ-fachen Versuches im obigen Beispiele eines der Glieder der σ-ten Potenz des nachstehenden Polynoms:

$$k_1(p_1 + q_1) + k_2(p_2 + q_2) + \cdots + k_n(p_n + q_n) = k_1 p_1 + k_2 p_2 + \cdots + \\ + k_n p_n + k_1 q_1 + k_2 q_2 + \cdots k_n q_n = P + Q.$$

Hierin bedeutet P die Wahrscheinlichkeit überhaupt eine weiße, Q die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel zu ziehen. Die Wahrscheinlichkeit, daß τ weiße Kugeln unter σ Versuchen erscheinen, ist demnach

$$\binom{\sigma}{\tau} P^\tau Q^{\sigma - \tau},$$

somit gleich der Wahrscheinlichkeit eines wiederholten Versuches für eine einfache Wahrscheinlichkeit.

Trotzdem bleibt die Tatsache der Mischung nicht ohne Einfluß auf die Streuung. Es läßt sich nämlich nachweisen, daß der reziproke Wert der Präzisionsmaßzahl des konstanten Mittelwertes jenes Mittel der reziproken Werte der Präzisionsmaßzahlen in den möglichen Einzelergebnissen übersteigt, welches man erhält, wenn man mit jeder Urne dieselbe Zahl von Versuchen macht, ja sogar größer sein kann, als der größte unter den reziproken Werten der Präzisionsmaßzahlen der Einzelergebnisse.

Wenn man nämlich auf der rechten Seite der Gleichung

$$PQ = (k_1 p_1 + k_2 p_2 + \cdots + k_n p_n)(1 - k_1 p_1 - k_2 p_2 - \cdots - k_n p_n)$$

für $k_i^2 = k_i(1 - k_1 - k_2 \cdots - k_{i-1} - k_{i+1} \cdots - k_n)$ setzt, so verwandelt sich dieselbe in

$$PQ = k_1 p_1(1 - p_1) + k_2 p_2(1 - p_2) + \cdots + k_n p_n(1 - p_n) + \\ + k_1 k_2 (p_1 - p_2)^2 + k_1 k_3 (p_1 - p_3)^2 + \cdots$$

und es folgt sofort

$$PQ > k_1 p_1 (1 - p_1) + k_2 p_2 (1 - p_2) + \cdots + k_n p_n (1 - p_n).$$

Weil nun das Mittel der Quadrate immer größer ist, als das Quadrat des mittleren Wertes, so folgt zunächst

$$PQ > (k_1 \sqrt{p_1 (1 - p_1)} + k_2 \sqrt{p_2 (1 - p_2)} + \cdots + k_n \sqrt{p_n (1 - p_n)})^2$$

und daraus endlich

$$\sqrt{m PQ} > k_1 \sqrt{m p_1 (1 - p_1)} + k_2 \sqrt{m p_2 (1 - p_2)} + \cdots + k_n \sqrt{m p_n (1 - p_n)}, \quad \text{(VI)}$$

worin m die Anzahl der Gesamtversuche bezeichnet. (Cournot, Wahrscheinlichkeitsrechnung § 77).

b) *Konstanz.* Wenn sich die Konstanz der Wahrscheinlichkeiten in den Versuchen ändert, entsteht immer übernormale Dispersion. Es bezeichne p_1 die Wahrscheinlichkeit, welche $r n_1$ Versuchen, p_2 die Wahrscheinlichkeit, welche $r n_2$ Versuchen, allgemein p_i die Wahrscheinlichkeit, welche $r n_i$ Versuchen zugrunde liegt; es werden je r Versuche zur Konstatierung einer Serienwahrscheinlichkeit verwendet und man erhalte hierbei $p_{11}, p_{12}, \cdots p_{1 n_1}$, als Werte für p_1; $p_{21}, p_{22}, \cdots p_{2 n_2}$ als Werte für $p_2 \cdots$, allgemein $p_{i1}, p_{i2}, \cdots p_{i n_i}$ als Werte für p_i; es bezeichne endlich p die Durchschnittswahrscheinlichkeit der Ereignisse für alle Versuche, so daß $p = \frac{p_1 n_1 + p_2 n_2 + \cdots + p_n n_n}{\Sigma n_i}$, so läßt sich leicht nachweisen, daß das doppelte Mittel der Fehlerquadrate immer größer ist, als das Quadrat des reziproken Wertes der Präzisionsmaßzahl, daß also immer übernormale Dispersion stattfindet.

Beweis. Die Summe Σ der Quadrate der Abweichungen jeder beobachteten Wahrscheinlichkeit von dem gemeinsamen Mittelwerte p ist $[(p_{1i} - p)^2] + [(p_{2i} - p)^2] + \cdots + [(p_{ni} - p)^2]$. Hierbei ist in den Summen für i der Reihe nach $1, 2, \ldots n_1$; $1, 2, \ldots n_2$; $1, 2, \ldots n_n$ einzusetzen. Transformiert man nun allgemein

$$(p_{\varrho i} - p)^2 \text{ in } (p_{\varrho i} - p_\varrho + p_\varrho - p)^2 = (p_{\varrho i} - p_\varrho)^2 + 2(p_\varrho - p)(p_{\varrho i} - p_\varrho) + (p_\varrho - p)^2,$$

so erhält man

$$[(p_{\varrho i} - p)^2] = [(p_{\varrho i} - p_\varrho)^2] + 2(p_\varrho - p)[(p_{\varrho i} - p_\varrho)] + n_\varrho (p_\varrho - p)^2$$

oder weil

$$\frac{[(p_{\varrho i} - p_\varrho)^2]}{n_\varrho} = \frac{p_\varrho q_\varrho}{r} \quad \text{und} \quad [(p_{\varrho i} - p_\varrho)] = 0$$

auch

$$[(p_{\varrho i} - p)^2] = \frac{n_\varrho p_\varrho q_\varrho}{r} + n_\varrho (p_\varrho - p)^2.$$

Die Summe der Quadrate der Abweichungen wird sodann:

$$\sum = \frac{n_1 p_1 q_1 + n_2 p_2 q_2 + \cdots + n_n p_n q_n}{r} + n_1 (p_1 - p)^2 + n_2 (p_2 - p)^2 + \\ + \cdots + n_n (p_n - p)^2.$$

Auch hier kann man auf jeden der Werte $p_i q_i$ die leicht beweisbare Transformation $p_i q_i = pq + (p_i - p)(q - p) - (p_i - p)^2$ anwenden und erhält

$$\sum = \frac{pq \Sigma n_i}{r} + [n_1 (p_1 - p)^2 + n_2 (p_2 - p)^2 + \cdots + n_n (p_n - p)^2] \frac{r-1}{r}$$

oder

$$\frac{\Sigma}{\Sigma n_i} = \frac{pq}{r} + \frac{\frac{r-1}{r} [n_1 (p_1 - p)^2 + n_2 (p_2 - p)^2 + \cdots + n_n (p_n - p)^2]}{\Sigma n_i} \qquad (\text{VII}_1)$$

Das Zusatzglied auf der rechten Seite der Gleichung ist stets positiv und von Null verschieden, wenn $r > 1$. Es folgt demnach $\frac{\Sigma}{\Sigma n_i} > \frac{pq}{r}$.

Unabhängigkeit. Auch der Mangel der Abhängigkeit bringt übernormale Dispersion hervor, es sei denn, daß die Abhängigkeit in einem bewußten Zwange nach einem bestimmten Endresultate besteht. Man kann den Beweis für dieses Theorem in ganz ähnlicher Weise, wie für den Fall der Störung der reinen Wahrscheinlichkeit durch den Mangel der Konstanz erbringen. Die *Veränderlichkeit* mit der Zeit ist ja selbst nichts anderes, als Störung der Unabhängigkeit durch die *Einflußnahme* der Zeit. Zum Beweise denke man sich ein Urnenschema, in welchem ϱ_1 Urnen unter ϱ das Mischungsverhältnis $p_1 q_1$ der schwarzen Kugeln zu den weißen, ϱ_2 Urnen das Mischungsverhältnis $p_2 q_2$, allgemein ϱ_i Urnen das Mischungsverhältnis $p_i q_i$ besitzen. Auf den Urnen mit dem Mischungsverhältnis $p_1 q_1$ sei die Zahl m_1, auf den Urnen mit dem Mischungsverhältnis $p_2 q_2$ die Zahl m_2 usf. angeschrieben. Man nehme an, daß man willkürlich zunächst eine Urne wähle, jedoch bei der Wahl derselben das $r$fache der darauf angeschriebenen Zahl von Zügen mache, und daß $p_{11}, p_{12} \cdots p_{1 m_1}$ die Wahrscheinlichkeitswerte in je r Zügen bei den Versuchen über p_1; $p_{21}, p_{22} \cdots p_{2 m_2}$ die Wahrscheinlichkeitswerte in je r Zügen bei den Versuchen über p_2 bezeichnen usf.

Es ist dann wieder die Quadratsumme der Fehlerquadrate

$$\sum = \frac{\varrho_1}{\varrho} [(p_{1i} - p)^2] + \frac{\varrho_2}{\varrho} [(p_{2i} - p)^2] + \cdots \frac{\varrho_n}{\varrho} [(p_{ni} - p)^2],$$

woraus sich nach schon bekannten Transformationen ergibt

$$\sum = \frac{\frac{\varrho_1}{\varrho} m_1 p_1 q_1 + \cdots + \frac{\varrho_n}{\varrho} m_n p_n q_n}{r} + \frac{\varrho_1}{\varrho} m_1 (p_1 - p)^2 + \cdots + \frac{\varrho_n}{\varrho} m_n (p_n - p)^2$$

$$= \frac{pq \sum \frac{\varrho_i m_i}{\varrho}}{r} + \left[\frac{\varrho_1}{\varrho} m_1 (p_1 - p)^2 + \cdots + \frac{\varrho_n}{\varrho} m_n (p_n - p)^2 \right] \frac{r-1}{r},$$

ferner

$$\frac{\sum}{\sum \frac{\varrho_i m_i}{\varrho}} = \frac{pq}{r} + \frac{r-1}{\sum \varrho_i m_i} \cdot [\varrho_1 m_i (p_1 - p)^2 + \cdots + \varrho_n m_n (p_n - p)^2] \qquad (\text{VII}_2)$$

oder endlich

$$\frac{\sum}{\sum \frac{\varrho_i m_i}{\varrho}} > \frac{pq}{r}.$$

§ 34. Die Methoden zur Überprüfung der Identität von statistischen und mathematischen Wahrscheinlichkeiten. Man kennt verschiedene Methoden, die Existenz von Wahrscheinlichkeiten in der Praxis nachzuweisen. Dieselben gehen sämtlich darauf hinaus, aus den Abweichungen einer Serie von Beobachtungen über die nach der Wahrscheinlichkeitslehre zu erwartenden Werte zu prüfen, ob diese Abweichungen mit den nach dem Bernouillischen Satze zu erwartenden Abweichungen übereinstimmen oder ob sie größer oder kleiner als die letzteren sind; das ist zu prüfen, ob normale, hypernormale oder subnormale Präzision vorhanden ist.

Gemäß den vorausgehenden Erörterungen wird eine solche Übereinstimmung allerdings nur die Existenz von Konstanz und Unabhängigkeit beweisen, während über die Gleichheit der Chance gesonderte Versuche anzustellen sein werden.

Die Versuche, ob die Abweichungen sich nach dem Bernouillischen Satze vollziehen, sind zumeist außerordentlich mühevoll, und es wird sich daher empfehlen, vor Durchführung derselben jeweilig eine kurze Voruntersuchung anzustellen, aus welcher man über die Möglichkeit einer Wahrscheinlichkeit im allgemeinen orientiert ist. Eine solche kann in verschiedener Art erfolgen. Entweder kann hierzu die Beantwortung der Frage benützt werden, ob die Beobachtungsfehler annähernd zur Hälfte unter den wahrscheinlichen Fehlern $0{,}477\sqrt{2 l_x w_x (1 - w_x)}$ liegen, wobei l_x die Zahl der Beobachtungen des Versuches im Werte x der Veränderlichen und w_x die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Ereignisses ist; oder auch die Beantwortung der Frage, ob die *Größenordnung* der Beobachtungsfehler mit der Größenordnung der theoretischen Fehler übereinstimmt.

Beispielsweise ist während der Jahre 1860 — 1879 über die Anzahl der Geburten in Dänemark beobachtet worden:

Jahr	in % der Bevölkerung	Abweichung vom Mittel	Jahr	in % der Bevölkerung	Abweichung vom Mittel
1860	3,39	0,16	1870	3,15	— 0,08
1861	3,29	0,06	1871	3,11	— 0,12
1862	3,21	— 0,02	1872	3,13	— 0,10
1863	3,23	0,00	1873	3,17	— 0,06
1864	3,14	— 0,09	1874	3,18	— 0,05
1865	3,25	0,02	1875	3,28	+ 0,05
1866	3,33	0,10	1876	3,36	+ 0,13
1867	3,15	— 0,07	1877	3,32	+ 0,09
1868	3,22	— 0,01	1878	3,26	0,03
1869	3,05	— 0,18	1879	3,29	0,06

Hierbei betrug die mittlere Zahl der Geburten 57 583 und die mittlere Prozentzahl der Geburten 3,23%. Der mittlere Fehler in der Geburtenzahl beläuft sich auf $\sqrt{2}\cdot 57583$ oder $\frac{3{,}23\sqrt{2}}{\sqrt{57\,583}}\,\% = 0{,}019\,\%$; der wahrscheinliche Fehler auf 0,477 des mittleren Fehlers, d. i. auf 0,009% der mittleren Bevölkerungszahl. Wäre die Wahrscheinlichkeit einer Geburt einer mathematischen Wahrscheinlichkeit vergleichbar, dann müßte die Hälfte der Beobachtungen mit kleineren Abweichungen vom Mittel als 0,01% behaftet sein, und es wäre 1 gegen 20000 zu wetten, daß keine der beobachteten Prozentzahlen größer oder kleiner als 3,29 und 3,17% ist. Letzteres findet aber siebenmal statt. Es wird demnach die Untersuchung auf Wahrscheinlichkeiten im vorliegenden Falle von vornherein unterlassen werden können.

Haben derartige Voruntersuchungen günstige Resultate ergeben, dann kann man sich zur Überprüfung des Gesetzes der Beobachtungsfehler der nachstehenden drei Methoden bedienen:

1. Für den Fall, daß eine große Anzahl von Serien mit annähernd gleich vielen Ergebnissen vorliegt, können die Abweichungen zwischen der theoretischen und der beobachteten Zahl der Ergebnisse mit den nach dem Bernouillischen Satze zu erwartenden Abweichungen unmittelbar verfolgt werden.

Beispielsweise wurden nach Westergaard (Grundzüge der Theorie der Statistik) im Zeitraum 1865 — 1884 in Dänemark Verstorbene der weiblichen Landbevölkerung beobachtet bezw. berechnet:

Jahr	Verstorbene beobachtet	Verstorbene berechnet	Abweichung	Jahr	Verstorbene beobachtet	Verstorbene berechnet	Abweichung
1865	15 265	15 377	+ 112	1875	14 311	14 481	+ 170
1866	14 215	14 090	— 125	1876	13 679	13 756	+ 77
1867	13 563	13 542	— 21	1877	13 265	13 244	— 21
1868	13 111	13 075	— 36	1878	13 237	13 135	— 102
1869	13 512	13 321	— 191	1879	13 738	13 788	+ 50
1870	13 267	13 276	+ 9	1880	14 404	14 441	+ 37
1871	13 335	13 266	— 69	1881	13 058	13 272	+ 214
1872	12 627	12 574	— 53	1882	13 778	13 666	— 112
1873	13 085	12 918	— 167	1883	13 362	13 324	— 38
1874	13 643	13 873	+ 230	1884	12 869	12 878	+ 9
				Summe	271 324	271 297	— 27

Die Anzahl der positiven Abweichungen ist 9, die der negativen 11. $\sqrt{2npq}$ ist im Mittel annäherungsweise $\sqrt{27129{,}7} = 164{,}7$. Nach der Tabelle im Anhange II besteht

die Wahrscheinlichkeit	für einen theoretischen Fehler	Innerhalb der berechneten Fehlergrenze liegen Fehler	Sohin beträgt die empirische Wahrscheinlichkeit eines Fehlers	die Wahrscheinlichkeit	für einen theoretischen Fehler	Innerhalb der berechneten Fehlergrenze liegen Fehler	Sohin beträgt die empirische Wahrscheinlichkeit eines Fehlers
0,1	14,8	2	0,1	0,6	97,8	11	0,55
0,2	29,6	4	0,2	0,7	120,5	14	0,7
0,3	44,4	7	0,35	0,8	149,2	15	0,75
0,4	60,9	9	0,45	0,9	191,5	18	0,9
0,5	78,5	11	0,55	1,—	∞	20	1,—

Im Falle sich die Beobachtungszahlen der Serien wesentlich unterscheiden, müssen dieselben auf gleiche Genauigkeit reduziert werden. Dies kann durch Division mit irgend einem Vielfachen der Quadratwurzel aus der Beobachtungszahl oder jeweiligen wahrscheinlichen Ereigniszahl, etwa dem diesem entsprechenden mittleren Beobachtungsfehler geschehen. Bezeichnet man mit l_x die Zahl der Beobachtungen in der Serie x, mit w die allen Serien gemeinsame Wahrscheinlichkeit, sohin mit $\sqrt{l_x w(1-w)}$ oder in erster Näherung mit $\sqrt{2 l_x w} = \sqrt{2 t_x}$ den mittleren Fehler, endlich mit ε_x den Beobachtungsfehler, dann werden die Werte $\frac{\varepsilon_x}{\sqrt{2t_x}}$ das Gaußsche Gesetz befolgen müssen. Die Häufigkeit des Fehlers ε_x wird durch $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\left(\frac{\varepsilon_x}{\sqrt{2t_x}}\right)^2}$, und die Wahrscheinlichkeit, daß ein Spezialwert von $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2t}}$ zwischen $h\frac{\varepsilon}{\sqrt{2t}}$ und $-h\frac{\varepsilon}{\sqrt{2t}}$ liegt, durch das Integral $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2t}}\right)} e^{-t^2} dt$ gegeben sein. Den Wert von h kann man mit $\sqrt{\frac{n}{2\left[\frac{\varepsilon_x^2}{2t_x}\right]}}$ bestimmen.

Als Beispiel sollen die Beobachtungen der 20 englischen Gesellschaften für Männer H^M zum Alter 65 über die Sterblichkeit in den verschiedenen Versicherungsdauern 3, 4, 5, 6 ... 29 dienen. Man erhält, wenn bei der Bestimmung der Präzision in erster Näherung für t die Werte von τ eingesetzt werden:

Versicherungsdauer: Jahre	Lebende	Tote beobachtet	Tote wahrscheinlich	Beobachtungsfehler		$\frac{\varepsilon}{\sqrt{2t}}$		Versicherungsdauer: Jahre	Lebende	Tote beobachtet	Tote wahrscheinlich	Beobachtungsfehler		$\frac{\varepsilon}{\sqrt{2t}}$	
x	l	τ	t	+	−	+	−	x	l_x	τ	t	+	−	+	−
3	265,—	15	12,2	2,8	—	0,51	—	16	370,—	25	17,0	8,0	—	1,13	—
4	271,5	12	12,5	—	0,5	—	0,10	17	371,—	19	17,0	2,0	—	0,32	—
5	266,5	7	12,2	—	5,2	—	1,39	18	324,5	13	14,9	—	1,9	—	0,37
6	376,5	16	17,3	—	1,3	—	0,23	19	300,—	14	13,8	0,2	—	0,04	—
7	356,5	23	16,4	6,6	—	0,97	—	20	300,—	10	13,8	—	3,8	—	0,85
8	328,—	15	15	—	—	—	—	21	317,5	8	14,6	—	6,6	—	1,65
9	323,5	12	14,8	—	2,8	—	0,57	22	279,5	12	12,8	—	0,8	—	0,16
10	341,—	21	15,6	5,4	—	0,83	—	23	288,—	17	13,2	3,8	—	0,65	—
11	363,5	14	16,7	—	2,7	—	0,51	24	287,—	12	13,2	—	1,2	—	0,24
12	354,5	16	16,3	—	0,3	—	0,05	25	252,—	13	11,6	1,4	—	0,27	—
13	367,5	25	16,9	8,1	—	1,15	—	26	249,—	9	11,4	—	2,4	—	0,57
14	387,5	13	17,8	—	4,8	—	0,94	27	232,—	10	10,6	—	0,6	—	0,13
15	341,—	13	15,6	—	2,6	—	0,51	28	195,5	9	9,0	—	—	—	—
								29	196,5	8	9,0	—	1,0	—	0,25

h hat den Wert $\sqrt{\frac{27}{25{,}7706}} = 1{,}02$.[1])

Das Maß der Übereinstimmung ergibt sich aus der nachfolgenden Tabelle über die beobachteten und berechneten Fehlergrößen.

Zahl der Serien	entsprechende Wahrscheinlichkeit	$h\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2t}}$ beobachtet	berechnet	Zahl der Serien	entsprechende Wahrscheinlichkeit	$h\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2t}}$ beobachtet	berechnet
1	0,037	—	0,03	15	0,556	0,52	0,54
2	0,074	—	0,07	16	0,593	0,52	0,59
3	0,111	0,04	0,10	17	0,630	0,58	0,63
4	0,148	0,05	0,13	18	0,667	0,58	0,68
5	0,185	0,10	0,17	19	0,704	0,66	0,74
6	0,222	0,13	0,20	20	0,741	0,85	0,80
7	0,259	0,16	0,23	21	0,778	0,87	0,86
8	0,296	0,23	0,27	22	0,815	0,96	0,94
9	0,333	0,24	0,30	23	0,852	0,99	1,02
10	0,370	0,26	0,34	24	0,889	1,15	1,13
11	0,407	0,28	0,38	25	0,926	1,17	1,37
12	0,445	0,33	0,42	26	0,964	1,42	1,49
13	0,482	0,38	0,46	27	1,000	1,68	∞
14	0,519	0,52	0,50				

2. Ein anderes Mittel zur Überprüfung von Beobachtungen mit annähernd gleicher Beobachtungszahl bildet das sogenannte Quadrat-

1) Bei Berücksichtigung genauer t Werte wird $h = \sqrt{\frac{26}{24{,}226}} = 1{,}036$. Die beobachteten $h\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2t}}$ werden unwesentlich verändert.

wurzelgesetz. Wenn die Zahl der Beobachtungen über eine Wahrscheinlichkeit p die Größe n_1 ist, dann beläuft sich der zur Wahrscheinlichkeit $W = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt$ gehörende Fehler f_1 auf $\gamma\sqrt{2n_1pq}$; wenn man die Zahl der Beobachtungen in n_2 verändert, dann beläuft sich der zur selben Wahrscheinlichkeit gehörende Fehler f_2 auf $\gamma\sqrt{2n_2pq}$. Es besteht demnach $f_1 : f_2 = \sqrt{n_1} : \sqrt{n_2}$. *Die zur selben Wahrscheinlichkeit aber verschiedenen Beobachtungszahlen gehörigen Fehler verhalten sich wie die Quadratwurzeln aus den Beobachtungszahlen.* Als Beispiel kann man sich der Beobachtungsreihen auf S. 137 bedienen. Die dort angeführten Beobachtungen verteilen sich auf 20 Serien annähernd gleicher Beobachtungszahl. Durch Vereinigung von je 2 Nachbarwerten erhält man 10 Serien mit doppelter, durch Vereinigung von je 4 Nachbarwerten 5 Serien mit vierfacher Beobachtungszahl. Die zugehörigen Fehler sind der nachfolgenden Tabelle zu entnehmen.

Jahr der Beobachtung	Abweichung	Jahr der Beobachtung	Abweichung	Jahr der Beobachtung	Abweichung
1865/1866	— 13	1875/1876	+ 247	1865/1868	— 70
1867/1868	— 57	1877/1878	— 123	1869/1872	— 364
1869/1870	— 182	1879/1880	+ 87	1873/1876	+ 310
1871/1872	— 122	1881/1882	+ 102	1877/1880	— 36
1873/1874	+ 63	1883/1884	— 29	1881/1884	+ 73

Aus der Tabelle auf S. 137 und der soeben entwickelten Tabelle läßt sich die folgende Übersicht über die zu den einzelnen Wahrscheinlichkeiten gehörigen Fehler konstruieren:

Fehlerwahrscheinlichkeit	Beobachtete Fehlergröße bei		
	20	10	5
	Beobachtungsserien		
0,1	9	13	—
0,2	21	29	36
0,3	37	57	—
0,4	50	63	70
0,5	69	87	—
0,6	102	102	73
0,7	112	122	—
0,8	167	123	304
0,9	191	182	—
1,—	230	247	310

Um eine Vorstellung davon zu erhalten, in welchem Größenverhältnisse die Fehler der 3 Serien zu einander stehen, kann man eventuell die Mittel der Fehler bilden. Sie ergeben sich mit 92, 102,5, 158,6. Es beträgt aber $92 \times \sqrt{2} = 130$ und $92 \times \sqrt{4} = 184$.

Bei Benützung des Quadratwurzelgesetzes kann man die Tafel der Krampschen Integrale entbehren.

3. Am häufigsten bedient man sich jedoch bei den Untersuchungen der Massenerscheinungen des Vergleiches der kombinatorischen und physikalischen Präzisionsmaßzahlen. Im nachfolgenden sollen drei Beispiele und zwar zwei für den Fall konstanter und eines für den Fall einer unregelmäßigen Beobachtungsmenge in den Serien durchgeführt werden.

Die im Königreich Sachsen während der Periode 1891—1900 beobachteten Geschlechtsverhältnisse der Geborenen ergeben die folgenden Werte für die Fehler und die Hilfsgrößen zur Berechnung der Präzisionsmaßzahlen:

Jahr	Zahl der männlich,	Geborenen im ganzen	Wahrscheinlichkeit einer männlichen Geburt	10^5 Abweichung gegen das Mittel	10^{10} Quadrat der Abweichung
1891	75 530	147 480	0,51214	— 49	2401
1892	73 251	142 527	0,51394	131	17161
1893	74 853	146 158	0,51213	— 50	2500
1894	74 339	145 661	0,51036	— 227	51529
1895	74 854	146 160	0,51214	— 49	2401
1896	78 090	152 217	0,51301	38	1444
1897	78 801	153 663	0,51283	20	400
1898	80 340	156 962	0,51185	— 78	6084
1899	81 332	158 579	0,51290	27	729
1900	81 638	158 563	0,51487	224	50176
Summe bzw. Durchschnitt	773 628	1507970	0,51263		134825

Die kombinatorische Präzisionsmaßzahl jeder Serie ist

$$\sqrt{\frac{150\,797}{2 \cdot 0{,}51263 \cdot 0{,}48737}} = 549{,}3;$$

die physikalische Präzisionsmaßzahl

$$\sqrt{\frac{9}{2 \cdot 0{,}00001348 25}} = 577{,}7,$$

der Divergenzkoeffizient demnach 0,904.

Aus den Beobachtungen über versicherte englische Leben während der Jahre 1863—1893, Ablebensversicherungen mit Gewinn, Männer 55 Jahre, ergibt sich, falls die Serien aus den Beobachtungsjahren (Vertragsdauern) entwickelt sind:

Beitrittsalter	Lebende	Verstorbene	Sterbenswahrscheinlichkeit	10^5 Abweichung gegen das Mittel	10^{10} Quadrat der Abweichung
50	3405	67	0,01968	— 79	6 241
49	3256	72	0,02211	164	26 896
48	3314	70	0,02112	65	4 225
47	3440	66	0,01919	— 128	16 384
46	3485	67	0,01923	— 124	15 376
45	3774	69	0,01828	— 219	47 961
44	3640	76	0,02085	38	1 444
43	3635	90	0,02476	429	184 041
42	3744	65	0,01736	— 311	96 721
41	3772	90	0,02386	339	114 921
40	3937	75	0,01905	— 142	20 164
39	3792	76	0,02004	— 43	1 849
38	3520	73	0,02074	27	729
Summe	46 714	956	0,02046		536 952

Die kombinatorische Präzisionsmaßzahl jeder Serie ist 299,4, die physikalische Präzisionmaßzahl jedoch 334,2, der Divergenzkoeffizient 0,9.

Bei Herleitung des letzteren für Beobachtungsreihen verschiedener Beobachtungszahlen kann man sich in erster Näherung mit Vorteil der Formel

$$\sqrt{[v_i\,(p_i - p)^2] : n} : \sqrt{pq}$$

bedienen, welche mit

$$\sqrt{\frac{1}{n}\left(\left[\frac{t_i^2}{l_i}\right] - \frac{[t_i]^2}{[l_i]}\right)} : \sqrt{pq} \qquad \text{(VIII)}$$

identisch ist, sofern l_i und t_i die Beobachtungs- und Ereigniszahlen der i^{ten} Serie sind und n die Zahl der Serien bedeutet.

Im nachfolgenden wird der Divergenzkoeffizient für die Beobachtung der Sterbenswahrscheinlichkeit des 35. Altersjahres nach der Tafel der 20 englischen Gesellschaften, Männer, mit Auslassung der ersten fünf Vertragsjahre, entwickelt, wenn die Serien wieder nach Vertragsdauern gebildet sind.

Versicherungsdauer	Lebende l_i	Tote t_i	Sterbenswahrscheinlichkeit $\frac{t_i}{l_i}$	$\frac{t_i^2}{l_i}$
5	15 465	127	0,00821	1,04267
6	14 131	116	0,00821	0,95236
7	12 941	93	0,00719	0,66867
8	11 814	92	0,00779	0,71668
9	10 722	83	0,00774	0,64242
10	9 436	80	0,00848	0,67840
11	7 502	57	0,00760	0,43320
12	5 893	48	0,00815	0,39120
13	4 314	34	0,00788	0,26792
14	3 173	34	0,01072	0,36448
15	1 596	10	0,00627	0,06270
16	931	10	0,01074	0,10740
17	537	6	0,01117	0,06702
18	339	10	0,02950	0,29500
19	226	2	0,00885	0,01770
20	120	. . .	. . .	. . .
21	71	. . .	. . .	. . .
22	37	. . .	. . .	. . .
23	24	. . .	. . .	. . .
24	11	. . .	. . .	. . .
25	9	. . .	. . .	. . .
26	6	. . .	. . .	. . .
27	5	. . .	. . .	. . .
28	5	. . .	. . .	. . .
29	—	—	—	—
24	99 308	802		6,70782

Hieraus folgt $[t_i]^2 = 643\,204$; $[t_i]^2 : [l_i] = 6{,}47686$ und für

$$\frac{1}{24}\left(\left[\frac{t_i^2}{l_i}\right] - \frac{[t_i]^2}{[l_i]}\right) = 0{,}00962,$$

während $pq = 0{,}00807 \times 0{,}99193 = 0{,}00800$ ist. Der Divergenzkoeffizient ist schließlich 1,091.

Zusatz. Die Formel des Divergenzkoeffizienten kann unmittelbar nicht verwendet werden, wenn nicht die reinen Wahrscheinlichkeiten p, sondern Funktionen solcher beobachtet sind. Behufs Transformation derselben macht man von der für eine beliebige Funktion f und kleine Fehler giltigen Formel

$$f(p_i) = f(p + (p_i - p)) = f(p) + (p_i - p)\frac{df(p)}{dp},$$

bezw. von der Folgerung

$$[(f(p_i) - f(p))^2] = \left(\frac{df(p)}{dp}\right)^2 [(p_i - p)^2]$$

Gebrauch. Aus ihr ergibt sich nach Formel V_1 auf Seite 132

$$\frac{df(p)}{dp}\sqrt{\frac{s-1}{[(f(p_i) - f(p))^2]}} = \sqrt{\frac{v}{pq}}.$$

Die letztere Formel hat Lexis zur Berechnung der Präzisionsmaßzahlen für das Geschlechtsverhältnis der Geborenen, das ist das Verhältnis der männlichen zu den weiblichen Geburten, verwendet. Bezeichnet man unter p die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt, unter $1 - p$ die einer Mädchengeburt, dann ist $f(p) = \frac{p}{1-p} = g$ und $\frac{df(p)}{dp} = \frac{1}{(1-p)^2}$. Man hat demnach zu vergleichen

$$\frac{p}{(1-p)^2}\sqrt{\frac{s-1}{[(g_i - g)^2]}} = \sqrt{vp}. \qquad \text{(IX)}$$

§ 35. Das Vorhandensein einer normalen Dispersion.

1. Gemäß den bisherigen Untersuchungen haben nachstehende statistische Wahrscheinlichkeiten einen Divergenzkoeffizienten, welcher nahe an 1 liegt:

a) Das Geschlechtsverhältnis der Geborenen. Diesbezüglich wurden eingehende Untersuchungen von Lexis an preußischem, englischem und französischem Materiale; ferner von Czuber an Lebendgeborenen ehelichen und ebensolchen unehelichen, an Totgeborenen ehelichen und ebensolchen unehelichen Geburten in Österreich angestellt. (Lexis „Das Geschlechtsverhältnis der Geborenen und die Wahrscheinlichkeitsrechnung“; ferner „Die Theorie der Massenerscheinungen“. Czuber „Wahrscheinlichkeitsrechnung“.)

b) Das Geschlechtsverhältnis der Gestorbenen in den ersten Altersklassen. Solche Untersuchungen wurden von Lexis und Kammann angestellt und vom letzteren auch auf das Geschlechtsverhältnis der Überlebenden ausgedehnt.

c) Die Sterblichkeitsverhältnisse aus der allgemeinen Bevölkerung mit Ausschluß der ersten und mittleren Kinderjahre. Derartige Untersuchungen wurden von Peek betreffend die männliche Bevölkerung der Niederlande in den Jahren 1880—1889 unternommen.

d) Die Sterblichkeitsverhältnisse an Versicherten. Diesbezüglich sind Beobachtungen einerseits nach Kalenderjahren der Beobachtung, andererseits nach Vertragsdauern angestellt worden. (Bohlmann „Über angewandte Mathematik usw.", Leipzig 1900; vom Verfasser „Die Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitslehre im Versicherungswesen usw.", Wien 1901). Unter der Leitung des Verfassers haben die Hörer des Versicherungskurses der Wiener technischen Hochschule vom Jahre 1901/1902 Untersuchungen über den Divergenzkoeffizienten an der Tabelle H^M angestellt und gefunden:

Beobachtungsalter	$w(1-w)$	$\frac{1}{n}\left\{\left[\frac{t_i^2}{l_i}\right]-\frac{[t_i]^2}{[l_i]}\right\}$	Divergenzkoeffizient
25	0,00538	0,00241	0,67
30	0,00333	0,00683	1,43
35	0,00800	0,00962	1,09
40	0,00846	0,00888	1,04
45	0,01062	0,02107	1,41
50	0,01577	0,01434	0,95
55	0,02096	0,02405	1,07
60	0,01962	0,02702	1,17
65	0,03842	0,02667	0,83
70	0,06833	0,05619	0,91

e) Die Invaliditätsverhältnisse der Alter zwischen dem 20. und 55. Altersjahre. Auch diesbezüglich stammen die folgenden Resultate aus Hörerkreisen des Versicherungskurses der Wiener technischen Hochschule vom Jahre 1901/1902.

Zimmermanns Statistik über die Eisenbahnbeamten während der Jahre 1877—1889.

Beobachtungsalter	Zugförderungspersonal			Zugbegleitungspersonal			Bahnbewachungspers.			Restpersonal		
	Halbes Quadrat der kombinatorischen Präzision	Halbes Quadrat der physikalischen Präzision	Divergenzkoeffizienten	Halbes Quadrat der kombinatorischen Präzision	Halbes Quadrat der physikalischen Präzision	Divergenzkoeffizienten	Halbes Quadrat der kombinatorischen Präzision	Halbes Quadrat der physikalischen Präzision	Divergenzkoeffizienten	Halbes Quadrat der kombinatorischen Präzision	Halbes Quadrat der physikalischen Präzision	Divergenzkoeffizienten
30	0,00181	0,00215	1,09	0,00219	0,00266	1,10	0,00118	0,00120	1,01	0,01098	0,00112	0,32
40	0,00918	0,01020	1,05	0,00721	0,00858	1,09	0,00456	0,00895	1,40	0,00412	0,01771	2,07
50	0,03055	0,03276	1,04	0,01749	0,03109	1,33	0,01773	0,02299	1,14	0,01636	0,01835	1,06
55	0,08126	0,09833	1,10	0,03427	0,04860	1,19	0,03471	0,07706	1,49	0,02899	0,04948	1,31
60	0,12908	0,17162	1,15	0,07400	0,09864	1,15	0,07016	0,15766	1,50	0,05977	0,09712	1,27
65	0,15317	0,51161	1,83	0,11167	0,48992	2,09	0,12982	0,40183	1,76	0,11124	0,36671	1,82
70	0,18441	0,42047	1,51	0,18856	0,13583	0,84	0,19658	0,21755	1,05	0,16390	0,17138	1,02

Kaans Statistik der Bruderladen während der Jahre 1886—1895.

Beobachtungsalter	Steinkohle, Eisenstein u. and. Mineralien					Hüttenbetrieb				
	Aktive	Invalide	Halbes Quadrat der kombinatorisch. Präzisionsmaßzahl	Halbes Quadrat der physikalischen Präzisionsmaßzahl	Divergenzkoeffizient	Aktive	Invalide	Halbes Quadrat der kombinatorisch. Präzisionsmaßzahl	Halbes Quadrat der physikalischen Präzisionsmaßzahl	Differgenzkoeffizient
25	18083	17	0,00093	0,00085	0,96	20576	42	0,00204	0,00565	1,6645
30	17115	38	0,00222	0,00272	1,10	—	—	—	—	—
35	14453,5	73	0,00502	0,01056	1,45	18585	78	0,00418	0,01444	1,8586
40	11760	108	0,00901	0,00852	0,97	—	—	—	—	—
45	9760,5	198	0,01977	0,03579	1,35	12896	165	0,01263	0,01486	1,8452
50	7391,5	331	0,04277	0,16425	1,96	—	—	—	—	—
55	1418,5	378	0,07514	0,14015	1,37	7030	353	0,04769	0,13360	1,6737
60	2123,5	298	0,12067	0,12041	1,00	—	—	—	—	—
65	832,5	168	0,16116	0,27079	1,30	—	—	—	—	—

Analoge Ergebnisse hat das Studium der Selbstmordstatistik (Harald Westergaards diesbezügliche Untersuchungen über die Selbstmorde in Dänemark, Belgien, Italien, veröffentlicht in seiner Theorie der Statistik 1890) und der Kriminalstatistik (desselben Untersuchungen über die wegen Diebstahls verurteilten Frauen) gezeitigt.

2. Von allen angeführten Fällen wird man innerhalb jener Grenzen, in welchen die Divergenzkoeffizienten nahe an 1 liegen, annehmen können, daß Konstanz und Unabhängigkeit vorhanden sind, daß also Mittelwerte, wenn nicht reine Wahrscheinlichkeiten, vorliegen, und wird auf sie die wesentlichsten Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung anwenden können. In der Invaliditätsstatistik scheint der Gebrauch der Wahrscheinlichkeitssätze und zwar für Eisenbahnbeamte um das 65. Altersjahr; für die Bergarbeiter zwischen dem 50. und 55. Altersjahre ungerechtfertigt. Im privaten Versicherungswesen werden demnach in der Regel auch nur die Wahrscheinlichkeiten bis zu den erwähnten Grenzaltern angewendet und Versicherungskombinationen gewählt, bei welchen das Invaliditätsrisiko vorzeitig endet. Die Kapitalversicherung wird in der Regel unter Aufrechthaltung der Versicherung auch ohne Prämienzahlung im Invaliditätsfall für solche Versicherungsarten vereinbart, in welchen das Kapital spätestens mit dem 65. Altersjahr zur Auszahlung gelangt; die Rentenversicherung meistens derart, daß der Rentenbezug spätestens mit demselben Altersjahre fällig wird.

3. Im Falle Konstanz und Unabhängigkeit für sich allein oder beide Bedingungen der reinen Wahrscheinlichkeit zusammen nicht vorhanden sind, ist der mittlere Fehler R gemäß den Ableitungen auf S. 134

bis 136 durch $R = \sqrt{\frac{pq}{r} + \frac{r-1}{r}\frac{[\varrho_i m_i (p_i - p)^2]}{[\varrho_i m_i]}}$ ausdrückbar, worin p die Durchschnittswahrscheinlichkeit aller Versuche, p_i die Serienwahrscheinlichkeit, ϱ_i die Wahrscheinlichkeit jeder Versuchsserie, m_i die Zahl der Versuche in jeder Serie zur Beobachtung der p_i und r die Zahl der Versuche in jedem *Serienteil* zur Beobachtung von $p_{\varrho i}$ bedeutet. Beide Summanden der Quadratwurzel sind positiv. Der erstere, welcher mit M^2 bezeichnet wird, kommt dem mittleren Fehler eines rein wahrscheinlichen Ereignisses mit der Wahrscheinlichkeit p, q gleich, der letztere μ^2 resultiert aus der Verletzung der Konstanz und Unabhängigkeit der Wahrscheinlichkeit. Nach Lexis wird die erstere die *unwesentliche*, die letztere die *physikalische* Schwankungskomponente genannt. Aus der Beziehung

$$R = \sqrt{M^2 + \mu^2}$$

folgt:

a) Die Teilung des mittleren Fehlerquadrates in die unwesentliche und physikalische Schwankungskomponente ist bei derselben Versuchsreihe willkürlich und hängt vor allem von der Größe der Serienteile für $p_{\varrho i}$ ab. Je *größer* r ist, desto *kleiner* wird die unwesentliche Schwankungskomponente, desto mehr bewegt sich aber die physikalische Schwankungskomponente dem Grenzwerte $\frac{[\varrho_i m_i (p_i - p)^2]}{[\varrho_i m_i]}$ zu. *Darin wird auch eine Erklärung für das Paradoxon gefunden, daß mit der Größe der Serien einer Beobachtungsreihe die Größe der Unregelmäßigkeiten zunimmt.* In dem Falle, als keine Serienteile unterschieden werden und alle n Serien nahezu die gleiche Anzahl von Versuchen r zeigen, geht die Formel für den mittleren Fehler in

$$R = \sqrt{\frac{pq}{r} + \frac{r-1}{r}\frac{[(p_i - p)^2]}{n}}$$

über.

Haben die Serien ungleiche Wahrscheinlichkeit und erscheint eine Teilung der Serien untunlich, dann wird man in der letzten Formel für n zweckmäßig die durchschnittliche Versuchszahl einsetzen.

b) Unter den beiden Komponenten des mittleren Fehlerquadrates ist M von der Variation der Wahrscheinlichkeiten in den Serien vollständig unabhängig und μ stets positiv. Der mittlere Fehler erreicht somit ein Minimum, wenn die physikalische Schwankungskomponente verschwindet, d. h. wenn $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = p$ oder wenn allen Versuchen ein konstanter und unabhängiger Wert zugrunde liegt.

Aus der Tatsache des Minimums folgt aber auch, daß der mittlere Fehler unter den Wert der unwesentlichen Schwankungskomponente nicht sinken kann, was für subnormale Erscheinungen erforderlich wäre. Solche Erscheinungen existieren daher überhaupt nicht oder können nur unter Voraussetzungen (etwa unter der Einwirkung einer bewußten Kraft) zustande kommen, von welchen die Rechnung nicht ausging.[1]) Das Sinken des Divergenzkoeffizienten unter 1 ist daher in statistischen Massenerscheinungen, wenn nicht willkürlichen Eingriffen in die Beobachtungsreihe, nur Beobachtungsfehlern zuzuschreiben.

c) Die physikalische Schwankungskomponente wird desto größer, je größer die Abweichungen der Serienwahrscheinlichkeiten von der mittleren Wahrscheinlichkeit und die Zahl der Versuche in den Werten der größten Abweichung sind. Man kann auch Berechnungen über die Größe derselben unter gewissen Voraussetzungen anstellen. Würde beispielsweise angenommen, daß jede Serie gleich viele Versuche hat und die Beobachtungen in diesen lediglich in Rücksicht der Wahrscheinlichkeitswerte variieren, endlich, daß die Änderungen der letzteren sich nahezu in arithmetischer Progression vom mittlern Werte vollziehen, so zwar daß

$$p_{\pm 1} = p \pm d; \quad p_{\pm 2} = p \pm 2d \cdots p_{\pm \frac{n}{2}} = p \pm \frac{n}{2} d,$$

dann ist μ bei großem r: $\frac{d^2(n+1)(n+2)}{24}$ oder wenn die größte Abweichung vom Mittelwerte $\frac{nd}{2} = u$ gleichkommt: $\frac{u^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)}{6}$ oder nahezu $\frac{u^2}{6}$.

So betrug nach Czuber die Zahl der im 32jährigen Zeitraume 1866

1) Es geschieht häufig genug, daß vor der Mittelbildung mehrerer Beobachtungswerte die Werte größten positiven und negativen Ausschlages vom Mittel eliminiert werden. Hierdurch wird der Mittelwert bei einigermaßen großer Anzahl von Beobachtungen nicht irritiert. Dagegen wird die Streuung wesentlich beeinflußt, und es kann hierdurch bewirkt werden, daß eine hypernormale Dispersion zur normalen und eine normale zur subnormalen Dispersion umgewandelt wird.

Läßt man beispielsweise in der auf S. 141 gegebenen Beobachtungsreihe über die männlichen Geburtenzahlen Sachsens während der Jahre 1890—1900 die Beobachtungen der Jahre 1894 und 1900 weg, dann verwandelt sich das arithmetische Mittel einer Knabengeburt (von 0,51263) in 0,51261, der Divergenzkoeffizient (von 0,904) in 0,314.

bis 1897 in den im Reichsrate vertretenen Königreichen und Ländern lebend geborenen ehelichen Kinder und zwar der männlichen Geburten 12093236, der weiblichen Geburten 11395279 und die durchschnittliche Zahl der Geburten 734016, ferner die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt 0,51486, endlich die $\sqrt{2}$fache kombinatorische Präzisionsmaßzahl der Bestimmung der letzteren 1212,2.

Zur Bestimmung der physikalischen Präzisionsmaßzahl dienten die nachstehenden Beobachtungen bezw. Berechnungen:

Jahr der Beobachtung	Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt	10^5fache Abweichung gegen das Mittel	10^{10}faches Quadrat der Abweichung	Jahr der Beobachtung	Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt	10^5fache Abweichung gegen das Mittel	10^{10}faches Quadrat der Abweichung
						Übertrag	130207
1866	0,51637	151	22801	1883	0,51450	— 36	1296
1867	0,51662	176	30976	1884	0,51378	— 108	11664
1868	0,51501	15	225	1885	0,51439	— 47	2209
1869	0,51575	89	7921	1886	0,51575	89	7921
1870	0,51514	28	784	1887	0,51323	— 163	26569
1871	0,51565	79	6241	1888	0,51461	— 25	625
1872	0,51594	108	11664	1889	0,51405	— 81	6561
1873	0,51554	68	4624	1890	0,51495	9	81
1874	0,51611	125	15625	1891	0,51473	— 13	169
1875	0,51397	— 89	7921	1892	0,51572	— 14	196
1876	0,51503	17	289	1893	0,51562	46	5776
1877	0,51488	2	4	1894	0,51455	— 31	961
1878	0,51398	— 88	7744	1895	0,51409	— 77	5929
1879	0,51445	— 41	1681	1896	0,51358	— 128	16384
1880	0,51479	— 7	49	1897	0,51373	— 113	12769
1881	0,51469	— 17	289				
1882	0,51523	37	1369				
		Summe	130207				229317

Hieraus resultiert die $\sqrt{2}$fache physikalische Präzisionsmaßzahl mit 822,14 und ein Divergenzkoeffizient von 1,47. Der Grund der Abweichung von der Einheit leuchtet beim Verfolgen der Zahlenreihe sofort ein. Die Geschlechtsverhältnisse unterlagen nämlich in dem beobachteten Zeitraum einer stetigen Verminderung, welche von dem größten positiven Fehler des Jahres 1867 mit $\frac{176}{10^5}$ auf den größten negativen Fehler im Jahre 1887 mit $\frac{163}{10^5}$ führte. Die daraus berechnete physikalische Schwankungskomponente ist $\frac{28773}{10^{10} \cdot 6}$ oder das 0,7096fache der unwesentlichen Schwankungskomponente mit $\frac{0{,}51486 \cdot 0{,}48514}{734016}$. Berücksichtigt man dieses letztere Ergebnis, dann resultiert ein wahrscheinlicher Wert für den Divergenzkoeffizienten von $\sqrt{1 + 0{,}7096} = 1{,}37$.

d) Das Lexissche Kriterium verliert alle Brauchbarkeit für die Beurteilung der Konstanz oder Unabhängigkeit der Wahrscheinlichkeitswerte, wenn jede der beobachteten Wahrscheinlichkeiten sehr

klein ist. In solchem Falle gehört M zu Größen erster, μ zu Größen zweiter Ordnung der Kleinheit und wird demnach $R = M$. Bortkiewicz hat den Fall kleiner Wahrscheinlichkeiten als Gesetz der kleinen Zahlen (besser Gesetz der kleinen Ereigniszahlen) benannt und gleichzeitig an einer größeren Anzahl von Versuchsfällen erprobt. Er fand bei der Untersuchung

α) der Selbstmorde von Kindern für Preußen während der Jahre 1869—1893

Verstorbene			Mittlerer Fehler nach der kombinatorischen Methode für			Mittlerer Fehler nach der physikalischen Methode für			Divergenzkoeffizient für		
Knaben	Mädchen	Summe	Knaben	Mädchen	Summe	Knaben	Mädchen	Summe	Knaben	Mädchen	Summe
49	11	60	1,40	0,66	1,55	1,57	0,58	1,53	1,12	0,88	0,99

Die Ergebnisse der einzelnen Jahre weisen auch die nach dem Bernouillischen Satze zu erwartende Streuung auf.

β) der weiblichen Selbstmorde in 8 deutschen Staaten (Schaumburg-Lippe, Waldeck, Lübeck, Reuß ä. L., Lippe, Schwarzburg-Rudolstadt, Mecklenburg-Strelitz, Sondershausen) während der Jahre 1881 bis 1893, indem die Beobachtung der Resultate jedes Staates in jedem Jahre als Serienbeobachtung aufgefaßt wurde, als erwartungsmäßige Dispersion 1,86, als physikalische Dispersion 2,15.

γ) der tödlichen Unfälle bei 11 Berufsgenossenschaften im deutschen Reiche während der Jahre 1886 bis 1894, indem wieder die Beobachtung jedes Jahres in jeder Berufsgenossenschaft als Serienbeobachtung behandelt wurde, für die erwartungsmäßige Dispersion 2,09, für die physikalische Dispersion 2,15.

δ) der durch Hufschlag eines Pferdes im preußischen Heere Getöteten während der Jahre 1875—1894, die Beobachtung jedes Jahres und Armeekorps als Serie aufgefaßt, für die erwartungsmäßige Dispersion 0,84, für die physikalische 0,85.

§ 36. Der Normalwert und das Gesetz der Abweichungen der extensiven Maßzahlen. Beim Vergleiche der in den verschiedenen Altern einer Dekremententafel der Lebenden, Aktiven, Unverehelichten, Ausscheidenden und beim Vergleiche der verschiedenen Körpermaße (Leibeslänge, Leibesumfang usw.) von Erwachsenen (eines bestimmten Alters) findet man, daß im ersteren Falle einem bestimmten Lebensalter, im letzteren Falle einem gewissen Körpermaße die größte Zahl der Ausscheidenden bezw. die

größte Zahl der Personen zugehört und daß von diesem Mittel, *dem Normalwert*, die Anzahl der Ausscheidenden bezw. Personen stets abnimmt. Man hat zur Erklärung dieser Erscheinung angenommen, daß die Normalwerte durch die Tendenz des menschlichen Typus entstehen, gewisse Ziele — beispielsweise eine gewisse Lebensdauer, Arbeitsdauer, Entwicklungsdauer oder eine gewisse Leibeslänge — zu erreichen und jedes Überschreiten bezw. Nichterreichen des *Normalwertes* als Abweichen vom normalen Zustand zu betrachten ist; ferner daß die Abweichungen vom Normalwert zufälligen Ursachen zuzuschreiben und ganz ähnlichen Gesetzen unterworfen sind, wie die Beobachtungsfehler bei der Bestimmung irgend eines Wertes nach den Regeln vom arithmetischen Mittel.

Diese Erklärung löst zunächst einen Widerspruch aus, welcher darin besteht, daß die Individuen der Masse in bezug auf die beobachteten Erscheinungen unabhängig sind, gleichwohl aber Gesetze für den Eintritt der Erscheinungen existieren. *Nur dann, wenn sich die gleiche Erscheinung in jedem einzelnen Individuum vollzieht und jeder Unterschied unter den Individuen lediglich darin besteht, daß der präzise Eintritt derselben durch den Zufall verhindert wird, ist bei Unabhängigkeit der Individuen eine Regelmäßigkeit der Abweichungen und zwar die Regelmäßigkeit des Zufalles denkbar.*

Eine weitere Stütze hat die Erklärung in der Erfahrung gefunden. Beispielsweise wird man bei Beobachtung von Körperformen die normalen Formen jenen Dimensionen zuschreiben, welche am häufigsten erreicht werden. Wird die unendlich kleine Zahl der Normalformen mit $w_0 dx$ bezeichnet, dann muß die der Körperform im Abstande der Dimension x für den Fall, daß die Erklärung zutrifft, durch die Gleichung $w_0 e^{-h^2 x^2} dx$ gegeben sein. Weil die Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung nicht für jede einzelne Dimension erwartet werden kann, wird es zweckmäßig sein, den Vergleich zwischen Beobachtung und Theorie an einer Summe von Erscheinungen zu ziehen. Speziell muß die Summe der Körperformen zwischen dem Normalwert und einem Abstande ϱ von diesem

$$w_0 \int_0^{\varrho} e^{-h^2 x^2} dx = \frac{w_0}{h} \int_0^{h\varrho} e^{-z^2} dz$$

sein.

Zur Bestimmung von h kann man irgend zwei bekannte, zusammengehörige Werte von Integral und Argument benützen. Beispielsweise ist leicht einzusehen, daß für $\varrho = \infty$ die Summe aller

auf der einen Seite vom Normalwert liegenden Ereigniszahlen (Körperformen) resultieren muß. Ist dieselbe A, so besteht die Beziehung

$$\frac{w_0}{h}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = A,$$

woraus für $h = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{w_0}{A}$ resultiert.

Weil aber w_0 selbst eine schwer meßbare Größe ist, so kann man zur Bestimmung des h auch durch die Aufsuchung jener Dimension gelangen, durch welche die Zahl der auf einer Seite vom Normalwerte gelegenen Körperformen halbiert wird. Für diesen Abstand muß

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{h\varrho} e^{-z^2}dz = \tfrac{1}{2}$$

werden, woraus für $h\varrho = 0{,}477$ oder für $h = \frac{0{,}477}{\varrho}$ folgt.

An den nachfolgenden Beispielen kann die Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung beurteilt werden.

Der Kollektivmaßlehre von Fechner entnimmt man die folgenden Tabellen über einzelne menschliche Maße (nach Messungen Professor Welckers):

I. Vertikalumfang von 450 europäischen Männerschädeln

mm	Zahl			mm	Zahl
365—369	1			480—484	3
370—374	2	445—449	2	485—489	6
375—379	3	440—444	5	490—494	10
380—384	11	435—439	5	495—499	13
385—389	25	430—434	18	500—504	30
390—394	31	425—429	22	505—509	28
395—399	40	420—424	47	510—514	52
400—404	54	415—419	57	515—519	50
405—409	63	410—414	64	520—524	60

II. Horizontalumfang von 450 europäischen Männerschädeln

mm	Zahl		
		576	1
565—569	2	60	1
560—564	1	64	6
555—559	3	65	19
550—554	12	66	42
545—549	14	67	58
540—544	30	68	133
535—539	43	69	202
530—534	39	70	267
525—529	53	71	323

III. Studentenrekrutenmaße in 2047 Messungen

Zoll	Zahl	Zoll	Zahl
		82	1
66	1	80	2
64	6	79	3
65	19	78	8
66	42	77	33
67	58	76	57
68	133	75	111
69	202	74	194
70	267	73	282
71	323	72	305

Der Normalwert wird in der Ziffernreihe I bei 408,5, in der Ziffernreihe II bei 522,2, in der Ziffernreihe III bei 71,77 angenommen: dementsprechend ergeben sich, wenn jede Zahlenreihe zu beiden Seiten des Normalwertes als einem besonderen Gaußschen Gesetze unterliegend erachtet wird (zweiseitiges Gaußsches Fehlergesetz nach Fechner), die folgenden Zusammenstellungen über die beobachteten und theoretischen Summen der Ereigniszahlen.

I. Tafel. Abstand vom Normalwerte, in welchem die Summe der Ereigniszahlen die Hälfte erreicht hat und zwar in der Beobachtungsreihe $\frac{\text{nach}}{\text{vor}}$ dem Normalwerte $\frac{9{,}25}{9{,}66}$. Präzisionsmaßzahlen $\frac{0{,}05156}{0{,}04940}$.

Fehlerverteilung nach dem Normalwert			Fehlerverteilung vor dem Normalwert		
Abstand	beobachtete[1])	theoretische	Abstand	beobachtete[1])	theoretische
mm	Summe		mm	Summe	
0,5	6,5	6,5	4,5	56,5	49,9
5,5	70,5	70,6	9,5	110,5	111,7
10,5	127,5	126,0	14,5	150,5	154,1
15,5	174,5	167,8	19,5	181,5	185,8
20,5	196,5	195,9	24,5	206,5	204,3
25,5	214,5	212,2	29,5	217,5	214,7
30,5	219,5	220,6	34,5	220,5	218,3
35,5	224,5	224,3	39,5	222,5	222,2
40,5	226,5		44,5	223,5	

II. Tafel. Abstand vom Normalwerte, in welchem die Summe der Ereigniszahlen die Hälfte erreicht hat und zwar in der Beobachtungsreihe $\frac{\text{vor}}{\text{nach}}$ dem Normalwerte $\frac{10,4}{11,6}$. Präzisionsmaßzahlen $\frac{0,0459}{0,0411}$.

Fehlerverteilung vor dem Normalwert			Fehlerverteilung nach dem Normalwert		
Abstand	beobachtete	theoretische	Abstand	beobachtete	theoretische
mm	Summe		mm	Summe	
2,2	26,4	24,0	2,8	33,6	29,7
7,2	75,4	78,3	7,8	86,6	91,2
12,2	127,4	124,7	12,8	125,6	126,4
17,2	155,4	160,2	17,8	168,6	162,1
22,2	185,4	185,6	22,8	198,6	189,4
27,2	198,4	201,1	27,8	212,6	213,0
32,2	208,4	209,9	32,8	224,6	219,5
37,2	217,4	214,7	37,8	227,6	226,—
42,2	217,4		42,8	228,6	229,5
			47,8	230,6	231,1
			52,8	231,6	—

III. Tafel. Abstand vom Normalwerte, in welchem die Summe der Ereigniszahlen die Hälfte erreicht hat und zwar in der Beobachtungsreihe $\frac{\text{vor}}{\text{nach}}$ dem Normalwerte $\frac{2,07}{1,38}$. Präzisionsmaßzahlen $\frac{0,2305}{0,3457}$.

Fehlerverteilung vor dem Normalwert			Fehlerverteilung nach dem Normalwert		
Abstand	beobachtete	theoretische	Abstand	beobachtete	theoretische
mm	Summe		mm	Summe	
0,77	235	246	0,23	70	68
1,77	558	554	1,23	352	344
2,77	825	811	2,23	546	551
3,77	1027	998	3,23	657	675
4,77	1160	1123	4,23	714	731
5,77	1191	1199	5,23	747	753

Als weiteres Beispiel kann die Absterbeordnung vom Jahre 1878

1) 6,5 und 56,5 statt 6,3 und 56,7.

der Versicherungsbank von Deutschland in Gotha (Männer) dienen. Vom Alter 61 wurden an Toten beobachtet:

Alter	Tote	Alter	Tote	Alter	Tote	Alter	Tote
61	228	71	291	81	175	91	31
62	226	72	288	82	150	92	5
63	235	73	278	83	174	93	—
64	259	74	290	84	123	94	16
65	257	75	279	85	104	95	
66	286	76	259	86	97	96	
67	294	77	245	87	69	97	5
68	279	78	243	88	35	98	
69	301	79	194	89	40	99	
70	281	80	228	90	27	100	

Die größte Dichtigkeit der Totenzahlen liegt in den Altern 70 und 71. Die Totensummen betragen vom Alter 71 aufwärts 3646. Die halbe Totensumme vom Maximalalter aufwärts wird zwischen dem Alter 76 und 77 mit den Totensummen 1685 und 1930 erreicht. Durch Interpolation findet man, daß das genaue Alter der Halbierungszahl der Toten in 76,555 fällt oder daß — weil $h \cdot 6{,}555 = 0{,}47693$ — der Wert von $h = 0{,}07275$ ist. Hieraus berechnet man nun zunächst für jedes Alter die Wahrscheinlichkeit, bis zu diesem gestorben zu sein. Die Probe auf die Richtigkeit der Theorie wird durchgeführt, indem man mit Hilfe des theoretisch bestimmten h und einer Integraltafel für die einzelnen Abstände die theoretische Zahl der Verstorbenen berechnet. Man findet:

Alter	Totensumme vom Normalalter (vergl. die Zusammenstellung auf pag. 154)	Wahrscheinlichkeit, zwischen Normalalter und Höchstalter zu sterben	erwartete Zahl der Totensummen bis zum nebenstehenden Alter
71	291	—	291
75	1426	0,31459	1418
79	2367	0,56601	2348
83	2920	0,80088	2979
87	3417	0,93719	3347
91	3589	0,98437	3518

Zusatz: Nach solcher Theorie wäre die Absterbeordnung als Fehlerverteilungsgesetz beim Anstreben des menschlichen Körpers gegen eine bestimmte mittlere Lebenslänge anzusehen. Die Zahl der Sterbefälle müßte gegenüber dem Maximum symmetrisch verlaufen, und jede Absterbeordnung wäre durch die Konstante h und das Normalalter bestimmt. Diese Folgerungen sind bei den zahlreichen diesbetreffenden Versuchen nicht vollinhaltlich bestätigt worden; vielmehr fügt sich dem Fehlerverteilungsgesetz die Totensumme *annähernd* lediglich *vom Normalalter aufwärts* d. h. gegen die höchsten Alter,

vom Normalalter abwärts aber nur durch eine kurze Strecke. Lexis hat in zahlreichen Versuchen über die Absterbeordnungen verschiedener Länder das Normalalter, die Präzisionsmaßzahl und die Anzahl von Personen festgestellt, welche dem angenommenen Fehlerverteilungsgesetze unterliegen (die Leben einer normalen Entwickelung). Die Ergebnisse sind in der nachstehenden Tabelle zusammengestellt:

Land	Normalalter Jahre	Präzisionsmaßzahl	Prozentsatz von Leben einer normalen Entwicklung	Land	Normalalter Jahre	Präzisionsmaßzahl	Prozentsatz von Leben einer normalen Entwicklung
Belgien	67	0,0546	46,8	England	72	0,0710	39,9
Frankreich	$72^1/_2$	0,076	40,0	Schweden	72	0,0768	42,8
Norwegen	74	0,068	49,6	Preußen	70	0,0741	33,8
Schweiz	70	0,0791	45,6	Niederlande	70	0,0705	36,6
Bayern	70	0,0761	31,2				

Ähnliche Versuche, wie sie Lexis an den Absterbeordnungen anstellte, wurden auch an anderweitigen Erscheinungen, den Invalidenordnungen, Ausscheideordnungen (Ausscheiden durch Tod und Invalidität), Krankenordnungen, Heiratsordnungen, Natalitätsordnungen vorgenommen. Einige noch nicht veröffentlichte Resultate sollen im nachstehenden wiedergegeben werden.

Resultatssummen[1]) zu beiden Seiten des Normalwertes

Abstand vom Normalwert in Jahren	Absterbeordnungen (Totensummen)								Invalidenordnungen (Invalidensummen)					
	Firks Männer		Zimmermann Eisenbahnbeamte		Gotha Männer		20 englische Gesellschaften Männer		Zimmermann Nichtfahrpersonal		Zimmermann Fahrpersonal		Kaan Bergarbeiter für Hüttenbau	
	vor[2])	nach	vor	nach	vor	nach	vor	nach	vor	nach	vor	nach	vor	nach
	$69^1/_2$		$72^1/_2$		71		$74^1/_2$		$62^1/_2$		61		$56^1/_2$	
1	710	710	113	113	291	291	150	150	1202	1202	2755	2644	155	171
2	2122	2120	358	357	582	579	393	391	3821	3711	5403	5353	323	332
3	3513	3361	604	597	861	857	661	636	6355	6389	7822	7696	482	494
4	4853	4692	862	855	1151	1147	883	860	8875	8745	9867	9700	611	612
5	6204	5994	1096	1093	1441	1426	1096	1086	10913	10925	12326	11472	731	745
6	7531	7238	1322	1306	1698	1685	1342	1305	12831	13040	14248	12996	858	853
7	8811	8547	1570	1534	1957	1930	1579	1501	14612	14813	16695	14794	992	965
8	10021	9721	1800	1743	2192	2173	1799	1692	16353	16612			1090	1060
9			2036	2005	2418	2367	2019	1865	17917	18155			1204	1142
10			2254	2150	2646	2595			19304	19307			1316	1199
11			2463	2320					20629	20372			1404	1245
12									21838	21089				

1) Gezogen aus den Dekremententafeln der Lebenden, Aktiven usf.

2) Vor und nach dem Normalwert, d. h. von diesem gegen die jüngeren bezw. älteren Altersklassen.

Resultatssummen zu beiden Seiten des Normalwertes

Abstand vom Normalwert in Jahren	Ausscheideordnung Nichtfahrpersonal		Krankenordnung (Krankheitstage) Zeuner		Österr. Zwangskassen 1890		Behm alle Beamte		Natalitätsordnung nach Körösi		Heiratsordnung (Heiratende) Böckh		Küttner	
	vor	nach	vor	nach	vor	nach	vor	nach	vor	nach	vor	nach	vor	nach
	62		67		26		35		25		25		$24\frac{1}{2}$	
1	370	321	179	176	222	230	822	847	377	351	2984	2732	6419	6419
2	435	681	357	355	432	460	1643	1628	708	683	5334	5012	18920	17854
3	1103	1047	536	537	615	693	2434	2384	1035	1007	7012	6967	29261	28568
4	1410	1373	717	719	812	906	3250	3146	1301	1352	8250	8634	36503	36583
5	1707	1652	899	901	1043	1138	3955	3920	1599	1628	8885	9975	38200	41763
6	1992	1916	1077	1076	1288	1369	4718	4663	2135	1885				
7	2274	2513	1252	1242	1511	1595	5377	5385						
8			1420	1397	1731	1805	5990	6088						
9			1531	1540	1925	2004	6474	6769						
10			1732	1623	2097	2174	6911	7451						
11			1876	1794	2219	2359								
12			2019	1902	2265	2546								

Die Probe, ob zwischen Theorie und Erfahrung Übereinstimmung besteht d. h. ob die Entwickelung der Ereigniszahlen nach dem Normalalter sich nach dem Gaußschen Fehlergesetz vollzieht, wurde für alle vorliegenden Fälle in derart versucht, daß aus den bekannten Wahrscheinlichkeiten für die Totensummen jedes Alters die h ermittelt wurden. Bei voller Übereinstimmung müßten die h für alle Alter konstant sein. Man erhält jedoch für die Absterbeordnung von Firks Männer und die

Alter	$74\frac{1}{2}$	$79\frac{1}{2}$	$84\frac{1}{2}$	$89\frac{1}{2}$	$94\frac{1}{2}$	$99\frac{1}{2}$
5 h	0,3400	0,3659	0,3759	0,3973	0,3982	0,3877

für die Absterbeordnung nach Zimmermanns Eisenbahnbeamten und die

Alter	$75\frac{1}{2}$	$78\frac{1}{2}$	$81\frac{1}{2}$	$84\frac{1}{2}$	$87\frac{1}{2}$	$90\frac{1}{2}$
3 h	0,2158	0,2215	0,2374	0,2355	0,2487	0,2454

für die Absterbeordnung der Männer nach Gotha, 1878:

Alter	75	79	83	87	91
4 h	0,2865	0,2951	0,3030	0,3289	0,3420

für die Absterbeordnung der 20 englischen Gesellschaften, Männer:

Alter	$77\frac{1}{2}$	$80\frac{1}{2}$	$83\frac{1}{2}$	$86\frac{1}{2}$	$89\frac{1}{2}$	$92\frac{1}{2}$	$95\frac{1}{2}$
3 h	0,2510	0,2499	0,2564	0,2608	0,2637	0,2680	0,2861

für die Invalidenordnung nach Zimmermanns Nichtfahrpersonal:

Alter	$65\frac{1}{2}$	$68\frac{1}{2}$	$71\frac{1}{2}$	$74\frac{1}{2}$	$77\frac{1}{2}$	$80\frac{1}{2}$	$83\frac{1}{2}$
3 h	0,2991	0,2994	0,3096	0,3160	0,3174	0,3373	0,3369

für die Invalidenordnung nach Zimmermanns Fahrpersonal:

Alter	64	67	70	73	76
3 h	0,3435	0,3168	0,3228	0,3589	0,3491

für die Invalidenordnung nach Kaan, Bergarbeiter:

Alter	$59\frac{1}{2}$	$62\frac{1}{2}$	$65\frac{1}{2}$	$68\frac{1}{2}$	$71\frac{1}{2}$	$74\frac{1}{2}$	$77\frac{1}{2}$
3 h	0,1014	0,0987	0,0965	0,0951	0,0944	0,0948	0,0967

für die Ausscheideordnung Nichtfahrpersonal:

Alter	65	68	71	74	77	80	83
3 h	0,2954	0,2930	0,3018	0,3017	0,3035	0,3108	0,2883

für die Krankenordnung nach Zeuner:

Alter	72	77	82	87	92
5 h	0,06965	0,07349	0,07735	0,08314	0,09148

für die österr. Zwangskassen:

Alter	31	36	41	46	51	56
5 h	0,1671	0,1638	0,1624	0,1622	0,1657	0,1684

für die Behmsche Krankenordnung:

Alter	40	45	50	55	60	65
5 h	0,2280	0,2278	0,2365	0,2478	0,2615	0,2764

für Körösis Natalitätstafel:

Alter	28	31	34	37	40	43	46
3 h	0,0659	0,0639	0,0618	0,0601	0,0605	0,0605	0,0599
Alter	51	54	57	60	63	66	69
3 h	0,0595	0,0587	0,0582	0,0576	0,0575	0,0575	0,0592

für die Heiratsordnung von Böckh:

Alter	30	35	40	45	50	55
5 h	0,13712	0,12110	0,09463	0,08235	0,07372	0,06813

für die Heiratsordnung nach Küttner:

Alter	$29\frac{1}{2}$	$34\frac{1}{2}$	$39\frac{1}{2}$	$44\frac{1}{2}$	$49\frac{1}{2}$	$54\frac{1}{2}$
5 h	0,1196	0,0874	0,0691	0,0591	0,0542	0,0523

Vierter Abschnitt.

Statistische Gesetze.

§ 37. Definition und Methoden der Ableitung statistischer Gesetze. Unter einem statistischen Gesetze versteht man eine Beziehung, welche die Wahrscheinlichkeiten zu verschiedenen Werten der Ursache ein und derselben Erscheinung verknüpft. So ist das Sterbegesetz jene Funktion des Alters, durch welche die Werte der Sterbenswahrscheinlichkeiten aus den einzelnen Altern sich berechnen lassen. Nach den Ausführungen der Einleitung kommt solchen Gesetzen kein definitiver Charakter und noch weniger der Charakter eines Naturgesetzes zu. In ersterem Belange sind die statistischen Gesetze sämtlich symptomatische Reihen, in letzterem Belange können die *statistischen* Ursachen mit den Ursachen im naturwissenschaftlichen Sinne nicht verglichen werden.

Es gibt dreierlei Methoden, zu Formeln für die statistischen Gesetze zu gelangen:

1. In der *empirischen Methode* werden die Beobachtungen durch eine möglichst einfache analytische Funktion von, mit der Erfahrung übereinstimmenden Verlaufe wiedergegeben. Die Methode ist unsicher, und es können etwaige Ergebnisse immer nur durch zahlreiche Versuche verifiziert werden.

2. In den *analytischen Methoden* wird ein Gesetz auf Grund eines vermeintlichen inneren Zusammenhanges der statistischen Ursache mit dem biologischen Ergebnisse aufgestellt. Es ist bisher in einem einzigen Falle, der Absterbeordnung, gelungen, auf Grund eines solchen Zusammenhanges eine brauchbare Formel zu konstruieren.

3. Nach den zur Zeit herrschenden Anschauungen sind bei jeder statistischen Erscheinung zwei Vorgänge zu unterscheiden: a) der Zusammenhang eines Ergebnisses mit den zugrunde liegenden Ursachen; b) die Streuung (das Fehlergesetz), unter welcher das Ergebnis bei der Beobachtung in Erscheinung tritt. Solche Deutungsweisen gehen

entweder von einer Verallgemeinerung des Gaußschen Fehlergesetzes oder von der Annahme aus, daß nicht das Ergebnis, sondern die zum Ergebnisse führenden Ursachen dem einfachen Gaußschen Gesetze unterliegen.

§ 38. Die empirischen Darstellungsmethoden statistischer Gesetze. Die Methode hat bisher die breiteste Anwendung gefunden uud wird überall da verwendet, wo die Form des Gesetzes noch wenig bekannt ist.

Für das *Sterbegesetz* haben sich aus den mannigfachen Versuchen, definitive Formen zu finden, nur wenige mehr in der Literatur erhalten.

Im Gesetze von Moivre (Annuitis on lives 1724) werden die Lebenden des Alters x l_x mit dem Alter durch die Beziehung

$$l_x = l_0 (86 - x)$$

verknüpft; dem genannten Autor stand zur Verifizierung lediglich die Absterbeordnung von Halley zur Verfügung.

Nach Lambert wird das Gesetz mit

$$l_x = A \left(\frac{96 - x}{x}\right)^2 - B (e^{-h_1 x} - e^{-h_2 x})$$

angeschrieben, worin

$$A = 10000 \quad h_1 = \frac{1}{2{,}431}$$

$$B = \quad 6176 \quad h_2 = \frac{1}{13{,}682}$$

und e die Basis des natürlichen Logarithmus bedeutet.

Nach Wittstein (das mathematische Gesetz der menschlichen Sterblichkeit) ist die Sterbenswahrscheinlichkeit

$$y_x = a^{-(M-x)^n} + \frac{1}{m} a^{-(mx)^n}. \tag{I}$$

Als Konstanten ergaben sich für die Tafel
von Brune

$$a = 1{,}42423 \qquad m = 5$$
$$M = 95 \qquad n = 0{,}63033,$$

der 20 englischen Gesellschaften

$$a = 1{,}41790 \qquad m = 6$$
$$M = 97 \qquad n = 0{,}63549.$$

Im Übrigen pflegt man zur Konstruktion die Taylorsche Reihe mit in jedem einzelnen Falle näher zu bestimmenden Konstanten in der Art heranzuziehen, daß diese Konstanten entweder mit den

steigenden Potenzen des Wertes einer Ursache oder mit den steigenden Potenzen einer Funktion des Wertes der Ursache oder endlich mit dem nach steigenden Potenzen der Ursache entwickelten Argumente einer Funktion verknüpft sind.

So wird nach Babbage die Zahl der Lebenden einer Absterbeordnung durch

$$l_x = a_0 + a_1 \frac{x}{1} + a_2 \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2}$$

ausgedrückt, worin $a_0 = 6199{,}8$, $a_1 = -9{,}29$, $a_2 = -1{,}5767$ bedeuten (Assurance Magazin Vol. V, pag. 185); so ist nach Littrow (Wien 1832)

$$l_x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4,$$

und es erhalten die Koeffizienten für die Süßmilchsche, von Baumann verbesserte Tafel die folgenden Werte:

$a_0 = 598{,}1673$ $\quad a_2 = 0{,}230895$ $\quad a_4 = 0{,}000032$

$a_1 = -8{,}417455$ $\quad a_3 = -0{,}005247.$

Moser schreibt das Sterbegesetz für die Einheit der Geborenen in der Form:

$$l_x = 1 + a_1 x^{1/3} + a_2 x^{9/3} + a_3 x^{17/3} + a_4 x^{25/3} + a_5 x^{33/3}$$

und berechnet für die Brunesche Sterbetafel:

$$a_1 = -0{,}2, \; a_2 = \frac{0{,}7125}{10^5}, \; a_3 = -\frac{0{,}1570}{10^8} \text{ usw.}$$

Für das *Invalidengesetz* wurden die Invaliditätswahrscheinlichkeiten gemäß den nachstehenden Formeln bestimmt:

Heym schreibt:

$$i_{20+x} = 0{,}001 + 50.000^{\frac{x}{59}-1}.$$

Behm nimmt an, daß sich die Invaliditätswahrscheinlichkeiten in den um je 5 Jahre auseinander stehenden Altern verdoppeln, daß

$$i_x = i_{20} \, 2^{\frac{x-20}{5}}$$

zu setzen sei und bestimmt i_{20} aus den Erfahrungen der Knappschaftskassen mit

$$0{,}00019036.$$

Weber verlangt (in dem Bulletin de l'Institut des Actuaires français, Oktober 1898) die Ausweitung dieser Formel durch eine Konstante, so daß man erhält

$$i_x = \alpha + \beta \cdot \gamma^{x-n}.$$

Der für die *Krankenversicherung* wichtige Reduktionsfaktor wird nach Moser in der Form

$$k \int_0^t s^x g^{-\frac{1}{a+x}} dx$$

angeschrieben, worin k, s, g, a Konstante bedeuten und t die versicherte Krankheitsdauer ist (Moser tables de morbidité, Paris 1900).

Nach dem Verfasser läßt sich die Wahrscheinlichkeit einer Geburt als Funktion des Alters der Eltern x in der folgenden Art anschreiben:

$$w = a e^{\alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4};$$

nach den Beobachtungen Körösis für Budapest ergeben sich

	für Väter	für Mütter
$a =$	0,368996	0,37101
$\alpha =$	— 0,0304487	— 0,0166961
$\beta =$	— 0,0002630	— 0,0005422
$\gamma =$	— 0,0001215	— 0,0001011
$\delta =$	0,0000020	

§ 39. Die analytischen Darstellungsmethoden statistischer Gesetze. Nach Gompertz kann man sich den Tod durch eine bestimmte Ursache „die *Todeskraft* (force of mortality)" herbeigeführt denken und diese *letztere* als Funktion des Alters zu bestimmen suchen. Werden die Todeskraft für das x^{te} Lebensjahr durch $\varphi(x)$, die Personen des Alters x durch l_x bezeichnet, so drückt $l_x \varphi(x) dx$ die Anzahl der zwischen dem Alter x und $x + dx$ Sterbenden $= - dl_x$ aus. Sohin besteht

$$\frac{-dl_x}{l_x} = \varphi(x) dx.$$

Behufs Bestimmung von $\varphi(x)$ nimmt Gompertz an, daß die Todeskraft der Abnahme des *Widerstandes* des menschlichen Organismus gegen die Zerstörung gleich sei und dieser Widerstand am Ende eines jeden gleich großen, unendlich kleinen Altersintervalles stets den gleich vielten Teil des jedesmaligen Restes verliere. Für diesen Fall ist

$$\varphi(x) - \varphi(x + dx) = c \varphi(x) dx$$

oder

$$d \log \varphi(x) = - c \varphi(x) dx$$

oder endlich

$$\varphi(x) = b q^x,$$

worin b die Integrationskonstante und $q = e^{-c}$ bedeuten. Hieraus folgt sodann unmittelbar:

$$l_x = c k^{q^x}. \qquad (\text{II}_1)$$

Diese Formel hat für einzelne Sterblichkeitstafeln die nachstehenden Werte ergeben:

	k	q
für die Northampton Tafel	0,7404	1,0261
„ „ Tafel von Déparcieux	0,6634	1,0164
„ „ Sterblichkeitstafel von Schweden	0,8562	1,0307
„ „ Carlislesche Tafel	0,8692	1,0282

Makeham hat auf Grund einer Überprüfung der Sterblichkeitskraft gegenüber den einzelnen Todesursachen gefunden, daß nicht für alle Todesursachen die erwähnte Formel der Sterblichkeitskraft brauchbar sei, vielmehr für einzelne Todesursachen durch eine Konstante ergänzt werden müsse.

Aus $\varphi(x) = a + bq^x$ ergibt sich sodann

$$l_x = as^x g^{q^x}. \qquad (\text{II}_2)$$

Nach dieser Formel wurden bisher alle wichtigeren Tafeln ausgeglichen, und es hat sich ergeben:

	s	g	q
für die Tafel RF der 4 französ. Ges.	0,9944272	0,9993868	1,1001136
„ „ „ $30Am$ der 30 amerik. Ges.	0,993696	0,999312	1,099713
„ „ „ H^M der 20 engl Ges.	0,99358	0,999094	1,09744
„ „ „ H^{MF} der 20 engl. Ges.	0,99344	0,99906	1,09648
„ „ „ von Gotha für Männer	0,99589	0,99874	1,09553
„ „ „ der 17 engl. Ges.	0,993404	0,998934	1,09537
„ „ Carlisle-Tafel	0,99195	0,99902	1,09448
„ „ „ A^F der 4 franz. Ges.	0,994993	0,998440	1,0916817
„ „ „ M_I der 23 deutschen Ges.	0,995207	0,99658	1,08229

Weil die Sterblichkeitstafel von Makeham die Sterblichkeit nur innerhalb der Alter 29—90 getreu wiedergibt, wurde dieselbe von Lazarus durch Berücksichtigung der auf die einzelnen Todesursachen bezogenen Sterblichkeitskräfte erweitert. Kommen n Sterblichkeitsursachen die Kräfte $a_1 + b_1 q_1^x$, $a_2 + b_2 q_2^x \cdots a_n + b_n q_n^x$ zu, so ergibt sich

$$\varphi(x) = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + b_1 q_1^x + b_2 q_2^x + \cdots + b_n q_n^x \quad ^1)$$

oder hieraus wieder

$$l_x = cs^x k_1^{q_1^x} k_2^{q_2^x} \cdots k_n^{q_n^x}.$$

Die Anwendung dieser verallgemeinerten Formel hat ergeben, daß man in allen Fällen mit

$$l_x = cs^x k_1^{q_1^x} k_2^{q_2^x}$$

ausreicht.

---

1) Anderweitige dieser allgemeinsten Form verwandte Formeln sind die von Oppermann

$$\varphi(x) = \frac{a}{\sqrt{x}} + b + c\sqrt{x}$$

und die von Thiele

$$\varphi(x) = a_1 e^{-b_1 x} + a_2 e^{-\frac{1}{2} b_2^2 (x-c)^2} + a_3 e^{b_3 x}.$$

§ 40. Die Verallgemeinerung des Gaußschen Fehlergesetzes. Wie im vorhergehenden Abschnitte erwiesen wurde, erfüllen die statistischen Gesetze in der Nähe des Maximums nahezu das Gaußsche Fehlergesetz. Dasselbe kann aus der Annahme abgeleitet werden, daß die Wahrscheinlichkeit der auf die Abweichung vom Normalwerte des Gesetzes einwirkenden positiven und negativen Elementarfehler gleich $\frac{1}{2}$ und ihre Anzahl immer unendlich groß ist. Es ist daher naheliegend, zu untersuchen, ob nicht volle Übereinstimmung mit den statistischen Gesetzen bei Erweiterung des Fehlergesetzes, also unter der Annahme eintreten könnte, daß die Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines Elementarfehlers von $\frac{1}{2}$ verschieden und ihre Zahl eventuell auch endlich ist.

Man kann auf dieser Basis die Aufstellung des Fehlergesetzes in mehrfacher Art versuchen.

Fechner ging von der Binomialformel aus. Ist die Wirkung eines positiven Elementarfehlers auf das Endergebnis i, die eines negativen Elementarfehlers i', dann wäre beim Eingreifen von n Elementarfehlern, darunter r positiven Fehlern, die Wahrscheinlichkeit einer Abweichung vom Normalwerte in der Größe $i'n + r(i - i')$

$$w_r = \binom{n}{r} p^r q^{n-r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} p^r q^{n-r},$$

und dieser Ausdruck ist demnach der allgemeinere Ausdruck für das Fehlergesetz.

Wegen der Unhandsamkeit dieser Formel wird dieselbe in der Regel näherungsweise durch andere Formeln ersetzt.

Mit Hilfe der Stirlingschen Näherungsformel $x! = x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x} \sqrt{2\pi}$ übergeht sie in

$$w_r = \frac{1}{\sqrt{2npq\pi}} \left(\frac{np}{r}\right)^{r+\frac{1}{2}} \left(\frac{nq}{n-r}\right)^{n-r+\frac{1}{2}}$$

oder wenn man für $r = np + z$ schreibt und somit unmittelbar die Wahrscheinlichkeit einer Abweichung z vom wahrscheinlichsten Werte np zu bestimmen trachtet, in

$$w_z = \frac{1}{\sqrt{2npq\pi}} \left(1 + \frac{z}{np}\right)^{-np-z-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{z}{nq}\right)^{-nq+z-\frac{1}{2}} \qquad \text{(IV)}$$

Die Formel verliert alle Brauchbarkeit für $z = -np$ oder $z = nq$. Während nämlich in solchem Falle das Glied der Binomialreihe in p^n bezw. q^n übergeht, wird die Näherungsformel unendlich.

Zu für endliche z brauchbareren Endresultaten führt die Binomialformel bei Benützung der Beziehung

$$\log \Gamma(u+1) = \frac{1}{2}\log 2\pi + \left(u+\frac{1}{2}\right)\log(u+1) - (u+1) + \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-y}} - \frac{1}{y} - \frac{1}{2}\right)\frac{e^{-(u+1)y}}{y}\,dy.$$

Ihre Substitution in $\log w_r$ führt zum Ergebnis:

$$\log w_r = 1 - \frac{1}{2}\log 2\pi + \left(n+\frac{1}{2}\right)\log(n+1) - \left(r+\frac{1}{2}\right)\log(r+1) - \left(n-r+\frac{1}{2}\right)\log(n-r+1) + r\log\frac{p}{q} + n\log q + \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-y}} - \frac{1}{y} - \frac{1}{2}\right)\left(e^{-(n+1)y} - e^{-(r+1)y} - e^{-(n-r+1)y}\right)\frac{dy}{y}$$

und wenn man diese Formel nach r differenziert und für

$$\log a = \int_0^\infty \frac{dy}{y}(e^{-y} - e^{-ay})$$

einsetzt, auch zu

$$\frac{d\log w_r}{dr} = \log\frac{p}{q} + \frac{1}{2(r+1)} - \frac{1}{2(n-r+1)} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r+1} + \frac{2}{r+2} + \cdots + \frac{2}{n-r} + \frac{1}{n-r+1}\right). \qquad (\mathrm{IV}_1)$$

Schreibt man nun für das Glied in der Klammer näherungsweise

$$\int_0^{n-2r} \frac{du}{r+1+u},$$

so folgt endlich für

$$\frac{d\log w_r}{dr} = \frac{1}{2(r+1)} - \frac{1}{2(n-r+1)} + \log\frac{(n-r+1):nq}{(r+1):np}$$

und für w_r selbst

$$w_r = C\left(1+\frac{z}{a}\right)^{\frac{1}{2}-a-z}\cdot\left(1-\frac{z}{b}\right)^{\frac{1}{2}-b+z}\cdot\left(\frac{c}{d}\right)^{z}. \qquad (\mathrm{IV}_1)$$

Hierin bedeuten

$$np+1 = a,\ nq+1 = b,\ \frac{a-1}{a} = c,\ \frac{b-1}{b} = d.$$

Aus der Formel kann man ableiten:

1. C nimmt näherungsweise den Wert $\frac{1}{\sqrt{2npq\pi}}$ an.

2. Die Kurve verschwindet für $z = -a$ und $z = b$ und ist zwischen diesen beiden Werten von z eingipflig. Das Maximum der Kurve liegt in $z = \frac{a-b}{2(a+b)} = \frac{n(p-q)}{2n+4}$.

3. Die Kurve ist im allgemeinen asymmetrisch. Für $np = nq$ nimmt sie die Form

$$w_z = C\left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}-a} \cdot \left(\frac{a-z}{a+z}\right)^z \qquad (\mathrm{IV}_2)$$

an und wird daher symmetrisch.

4. Nachdem das arithmetische Mittel der Ordinaten der Wahrscheinlichkeitskurve $\sum r\binom{n}{r}p^r q^{n-r} = np$, also in $z = 0$ liegt, der Zentralwert (für welchen $\sum\binom{n}{r}p^r q^{n-r} = \frac{1}{2}$) bei großen n vom arithmetischen Mittel um $\frac{n(p-q)}{4n+8}$, und der Normalwert, wie oben gezeigt wurde, von diesem um $\frac{n(p-q)}{2n+4}$ absteht, *so folgt für das erweiterte Gaußsche Gesetz, daß der Zentralwert zwischen arithmetischen Mittel und Normalwert gelegen ist* (*Fechnersches Lagengesetz*). Nach der Tabelle auf Seite 76 gilt das Lagengesetz für die Absterbeordnung.

§ 41. Das Pearsonsche Fehlergesetz. Zu weit einfacheren Formeln trotz der Verallgemeinerung des Fehlergesetzes gelangt Pearson. Derselbe setzt voraus, daß im ganzen auf ein Ergebnis n Elementarfehler und zwar np positive und nq negative Fehler je mit der Wahrscheinlichkeit p und q einwirken können und ein Ergebnis bestimmter Genauigkeit durch die Einwirkung von r Elementarfehlern erhalten werde. Die Wahrscheinlichkeit, daß sich unter den r Elementarfehlern s Fehler einer bestimmten Gattung (also s positive oder s negative Fehler) befinden, läßt sich sodann in Analogie mit der folgenden Aufgabe lösen: Eine Urne enthält np weiße und nq schwarze Kugeln; welches ist die Wahrscheinlichkeit, in r Zügen $r - s$ weiße und s schwarze Kugeln zu ziehen, falls die gezogene Kugel in die Urne nicht zurückgelegt wird?

Die Formel für diese Wahrscheinlichkeit

$$y_{s+1} = \binom{r}{s}\frac{np(np-1)(np-2)\cdots(np-r+s+1)nq(nq-1)\cdots(nq-s+1)}{n(n-1)\cdots(n-r+1)}$$

leidet gleichfalls an Unhandlichkeit. Zu ihrer Vereinfachung wird

$$\frac{y_{s+1}-y_s}{\frac{1}{2}(y_{s+1}+y_s)} = \frac{2[(r+1)(1+qn)-s(n+2)]}{(r+1)(1+qn)-s[2(r+1)+n(q-p)]+2s^2}$$

gebildet und die rechte Seite der Gleichung mit Hilfe der Substitution

$$\sigma = s - \frac{(r+1)(1+qn)}{n+2}$$

vereinfacht. Man erhält auf solche Art

$$\frac{y_{s+1} - y_s}{\frac{1}{2}\left(y_{s+1} + y_s\right)} = -\frac{\sigma}{\sigma^2\beta_3 + \sigma\beta_2 + \beta_1},$$

wobei

$$\beta_1 = \frac{(r+1)(n-r+1)(1+qn)(1+pn)}{(n+2)^3},\quad \beta_2 = \frac{n(n-2r)(p-q)}{(n+2)^2},\quad \beta_3 = \frac{1}{n+2}.$$

Näherungsweise läßt sich die letztere Formel auch schreiben

$$\frac{dy}{y_\sigma d\sigma} = -\frac{\sigma}{\sigma^2\beta_3 + \sigma\beta_2 + \beta_1}. \tag{V}$$

Zur Charakteristik der Fehlerfunktion wird bemerkt, daß β_1 und β_3 stets positiv sind, $\beta_2 = 0$ ist für $p = q$ und die Funktion ein einziges endliches Maximum (einen Gipfel) und zwar im Werte $\sigma = 0$ besitzt. Im übrigen hängt aber die Natur der Funktion y_σ wesentlich davon ab, ob $\sqrt{\beta_2^2 - 4\beta_1\beta_3}$ reell oder imaginär ist: im ersten Falle ist nämlich das Integral der rechten Seite der Gleichung rein logarithmisch, im letzteren Falle trigonometrisch-logarithmisch. Beachtet man diesen Umstand, so wie daß n endlich oder unendlich, endlich $p = q$ oder verschieden sein kann, dann erhält man die folgenden fünf Kurventypen.

1. Sind die Wurzeln α_1 und α_2 von $\beta_1 + \beta_2\sigma + \beta_3\sigma^2 = 0$ reell, dann wird

$$\frac{d\log y}{d\sigma} = -\frac{\sigma}{\beta_3(\sigma-\alpha_1)(\sigma-\alpha_2)}$$

$$= -\frac{1}{\beta_3(\alpha_1-\alpha_2)}\frac{d}{d\sigma}\left[\alpha_1\log(\sigma-\alpha_1) - \alpha_2\log(\sigma-\alpha_2)\right]$$

und y selbst

$$y = C(\alpha_1 - \sigma)^{-\nu\alpha_1}(\alpha_2 - \sigma)^{\nu\alpha_2}, \tag{V$_1$}$$

worin

$$\nu = \frac{1}{\beta_3(\alpha_1 - \alpha_2)};$$

Nachdem die beiden Wurzeln immer das gleiche Zeichen haben müssen, so folgt, daß auch $\nu\alpha_1$ und $\nu\alpha_2$ gleich bezeichnet sind und hieraus wieder, daß y in dem $\sigma = 0$ näherliegenden Wurzelwerte verschwindet und in dem entfernteren $-\infty$ ist, endlich aber, daß die Funktion im letzteren beim Wachsen des σ mit $+\infty$ einsetzt und sich sodann im unendlich fernen Punkte, gleich wie auf der anderen Seite vom Nullpunkte, der Abszissenachse assymptotisch nähert.

2. Ist $p = q$ und demnach auch $\beta_2 = 0$, dann wird

$$y = C(\beta_1 + \beta_3\sigma^2)^{-\frac{1}{2\beta_3}}. \tag{$_2$V}$$

Der Gipfel hat den Wert $C : \beta_1^{\frac{1}{2\beta_2}}$; die Kurve liegt ganz in der positiven Halbebene, ist zu beiden Seiten vom Maximum symmetrisch und verläuft gleichfalls gegen die Abszisse assymptotisch.

3. Für $n = \infty$ wird $\beta_1 = (r+1)pq$, $\beta_2 = p - q$, $\beta_3 = 0$ und

$$y = Ce^{-\frac{\sigma}{\beta_2}} \left(\sigma + \frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^{\frac{\beta_1}{\beta_2^2}}. \qquad (V_3)$$

Die Kurve erhält den Wert Null in $\sigma = -\frac{\beta_1}{\beta_2}$ und nähert sich der Abszisse auf der anderen Seite vom Nullpunkt assymptotisch.

4. Sind die Wurzeln α_1 und α_2 komplex, dann erhält man zunächst für

$$\log y = k - \frac{1}{2\beta_3} \log (\beta_1 + \beta_2 \sigma + \beta_3 \sigma^2) + \frac{\beta_2}{\beta_3 \sqrt{4\beta_1\beta_3 - \beta_2^2}} \operatorname{arctg} \frac{2\beta_3\sigma + \beta_2}{\sqrt{4\beta_1\beta_3 - \beta_2^2}}.$$

Diese Formel übergeht für $u = \sigma + \frac{\beta_2}{2\beta_3}$, $a = \frac{\sqrt{4\beta_1\beta_3 - \beta_2^2}}{2\beta_3}$, $m = \frac{1}{2\beta_3}$, $\nu = \frac{\beta_2}{\beta_3\sqrt{4\beta_1\beta_3 - \beta_2^2}}$ in

$$y = C\left(1 + \frac{u^2}{a^2}\right)^{-m} e^{\nu \operatorname{arctg} \frac{u}{a}}. \qquad (V_4)$$

Die Kurve ist asymmetrisch und verläuft zu beiden Seiten vom Nullpunkt gegen die Abszisse assymptotisch.

5. Für $n = \infty$ und $p = q$ erhält man endlich die Form

$$y = Ce^{-\frac{\sigma^2}{2(n+1)pq}}, \qquad (V_5)$$

welche mit der Gaußschen Fehlerfunktion identisch ist.

Alle die fünf Typen erzeugen lediglich eingipflige Kurven (Kurven mit einem einzigen Maximum). Doch während nach dem Gaußschen Gesetz die Fehlerfunktion stets *symmetrisch* vom Gipfel und *assymptotisch* zur Abszisse verläuft, können die Formen V_1, V_3 und V_4 auch asymmetrisch sein; kommen die Formen V_1 und V_3 auf einer Seite vom Nullpunkt zum Schnitte mit der Abszisse, während dieselben auf der anderen Seite assymptotisch verlaufen; ist die Form V_4 asymmetrisch und zu beiden Seiten vom Nullpunkt assymptotisch verlaufend gegen den unendlich fernen Punkt.

Zur Erklärung komplizierterer Formen, eventuell mehrgipfliger Kurven, kann man eventuell mehrere eingipflige Kurven verwenden, welche durch Addition oder Subtraktion zu verbinden sind.

§ 42. Die Erklärung der statistischen Gesetze als Funktionen des Gaußschen Fehlergesetzes. Eine andere Darstellungsweise der statistischen Gesetze ist durch die Annahme möglich, daß die Erscheinung eine Funktion einer unabhängigen, nach den Regeln des Zufalls um einen Mittelwert schwankenden Ursache ist oder daß der Erscheinung ein Bedingungskomplex zu Grunde liegt, welcher so wirkt, als wenn eine gemeinschaftliche konstante und nur zufällig um einen Mittelwert oszillierende Ursache für das Vorkommen eines Ereignisses maßgebend wäre.

Ein einfaches Beispiel für eine derartig definierte Erscheinung bildet die Lagerung von Kugeln, welche im luftleeren Raum mit vollkommen gleicher Elevation, jedoch mit einer variablen, in den Einzelversuchen sich nach dem Gaußschen Fehlergesetz ändernden Anfangsgeschwindigkeit gegen ein bestimmtes Ziel geschleudert werden. Wenn sodann c_0 den Mittelwert der Anfangsgeschwindigkeit und h die Präzisionsmaßzahl bedeutet, so ist das Verhältnis der Zahl der Würfe von einer Anfangsgeschwindigkeit, welche zwischen c und c_0 liegt, zu der Gesamtzahl der Würfe

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h(c-c_0)} e^{-t^2} dt$$

und die Zahl der Kugeln, welche bei einer Einheit von Versuchsfällen zwischen zwei bestimmten Entfernungen x und x_0 aufschlagen,

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h\left(\sqrt{\frac{x}{m}} - \sqrt{\frac{x_0}{m}}\right)} e^{-t^2} dt.$$

Man gelangt zu letzterer Formel leicht, wenn man allgemein aus der Elevation α und der Anfangsgeschwindigkeit c den Aufschlagspunkt

$$x = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{g}$$

berechnet und schließlich für $\frac{\sin 2\alpha}{g} = m$ setzt.

Ganz allgemein wird bei der Voraussetzung, daß der Wert einer Ursache x dem Gaußschen Fehlergesetze folgt, als Wahrscheinlichkeit, daß der Wert der Ursache zwischen x und x_0 liegt, durch

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h(x-x_0)} e^{-t^2} dt$$

gegeben sein und sohin als Wahrscheinlichkeit, daß die Resultate

einer Erscheinung y, welche sich als Funktion $f(x)$ der Erscheinung darstellt, folgen

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{h[\varphi(y)-\varphi(y_0)]} e^{-t^2}dt,$$

wenn $\varphi(y)$ die inverse Funktion von x ist.

Man kann auf solche Weise jede beliebige statistische Erscheinung darstellen. Wenn für eine solche ein analytischer Ausdruck $F(y)$ gefunden ist, sohin $F(y) - F(y_0)$ die Abweichungen vom Normalwert y_0 bis zum Werte y ergibt, dann hat man lediglich

$$F(y) - F(y_0) = \frac{M}{\sqrt{\pi}}\int_0^{h[\varphi(y)-\varphi(y_0)]} e^{-t^2}dt \qquad \text{(VI)}$$

gleichzusetzen und sodann $\varphi(y) - \varphi(y_0)$ zu bestimmen.

Als ein Beispiel kann die Dekremententafel der Lebenden dienen. Unter der Voraussetzung, daß sich diese durch die Gompertzsche Formel ab^{c^y} darstellen läßt, erhält man sodann zur Bestimmung der Absterbefunktion die Grundgleichung

$$ab^{c^{y_0}} - ab^{c^y} = \frac{M}{\sqrt{\pi}}\int_0^{h[\varphi(y)-\varphi(y_0)]} e^{-t^2}dt.$$

Setzt man hierin für $\varphi(y) = \chi(c^y)$ und für $c^y = u$, so erhält man

$$ab^{u_0} - ab^{u} = \frac{M}{\sqrt{\pi}}\int_0^{h[\chi(u)-\chi(u_0)]} e^{-t^2}dt.$$

Um die Funktion $\chi(u)$ zu finden, bilde man vorläufig ihre Taylorsche Reihe

$$\chi(u) - \chi(u_0) = \frac{u-u_0}{1}\left(\frac{d\chi}{du}\right)_0 + \frac{(u-u_0)^2}{2!}\left(\frac{d^2\chi}{du^2}\right)_0 + \cdots$$

Die Koeffizienten der Entwickelung ergeben sich durch wiederholte Differenziation der transformierten Grundgleichung, wenn man in den Endresultaten jeweils für $u : u_0$ einsetzt. Man findet auf solche Weise:

$$\frac{M}{2} = ab^{u_0};\ \left(\frac{d\chi}{\partial u}\right)_0 = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\log b}{h};\ \left(\frac{d^2\chi}{\partial u^2}\right)_0 = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\log b^2}{h}$$

$$\frac{d^3\chi}{\partial u^3} = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\log b^3}{h}\left(1+\frac{\pi}{2}\right);\ \left(\frac{d^4\chi}{du^4}\right)_0 = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\log b^4}{h}(1+6\pi)$$

Die Reihe der $\chi(u)$ konvergiert rasch, nachdem die Konstanten klein sind. So besteht für die Konstanten der Sterbetafel des österr. Beamtenvereins

$$h\left(\frac{d\chi}{dy}\right)_0 = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\log b = 0{,}0076278;$$

$$h\left(\frac{d^2\chi}{dy^2}\right)_0 = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}(\log b)^2 = -0{,}000065653;$$

$$h\left(\frac{d^3\chi}{dy^3}\right)_0 = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}(\log b)^3\left(1+\frac{\pi}{2}\right) = 0{,}0000014527;$$

$$h\left(\frac{d^4\chi}{dy^4}\right)_0 = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}(\log b)^4(1+6\pi) = 0{,}000000096541.$$

Die Dekremententafel der Lebenden wird demnach auch für größere Altersdistanzen von x_0 näherungsweise durch das Integral

$$ab^{cx_0} - \frac{M}{\sqrt{\pi}}\int_0^{h[\chi(u)-\chi(u_0)]} e^{-t^2}dt$$

ausdrückbar sein, wenn für die obere Grenze des Integrales

$$-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\log b\,(c^x - c^{x_0}) - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\log b^2}{1\cdot 2}(c^x - c^{x_0})^2$$
$$-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\log b^3}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1+\frac{\pi}{2}\right)(c^x - c^{x_0})^3 - \cdots$$

gesetzt wird.

Auf dieselbe Art löst man die Aufgabe, eine analytische Form für die Dekremententafel der Lebenden zu finden, wenn die Lebenden durch die Gompertz-Makehamsche Formel $a\beta^x b^{cx}$ ausgedrückt sind. In solchem Falle hat man zunächst

$$a\beta^{x_0}b^{cx_0} - a\beta^x b^{cx} = \frac{M}{\sqrt{\pi}}\int_0^{h[\varphi(x)-\varphi(x_0)]} e^{-t^2}dt,$$

und wenn man

$$\beta = b^k,$$

sodann

$$kx + c^x = y$$

und endlich

$$\varphi(x) = \chi(kx + c^x) = \chi(y)$$

setzt, wie vorhin

$$ab^y - ab^{y_0} = \frac{M}{\sqrt{\pi}}\int_0^{h[\chi(y)-\chi(y_0)]} e^{-t^2}dt.$$

Die Absterbeordnung hat demnach den gleichen analytischen Ausdruck, wie nach der Formel von Gompertz, wenn man statt c^x den Wert $kx + c^x$ einsetzt.

Daraus kann man sich für die Gesetzmäßigkeit der Absterbeordnung die folgende, ohne weiteres auf die Gesetzmäßigkeit aller übrigen statistischen Erscheinungen ausdehnbare, Anschauung bilden.

Bezeichnet man als die primäre Ursache der Lebenslänge die Körperkonstitution, d. i. die Summe der auf die Lebenserhaltung gerichteten Fähigkeiten und Kräfte des Menschen und mit $x = \varphi(y)$ die Beziehung zwischen der Körperkonstitution x und der Lebenslänge y, dann geben die abgeleiteten Formeln zunächst an, wie viele Todesfälle zwischen zwei Konstitutionen und mittelbar, wieviel Todesfälle zwischen zwei Lebenslängen liegen. Die Absterbeordnung kann aber als Resultat zweier Grundprozesse angesehen werden und zwar:

a) als Resultat des Lebensprozesses, wenn man damit die Beziehung zwischen Lebenslänge und Konstitution bezeichnet und b) als Resultat der Streuung. In erster Näherung wächst die Körperkonstitution in geometrischer Progression mit der Lebenslänge.

Man hat vielfach erörtert, ob die Absterbeordnung ein Naturgesetz ist oder nicht. Das Problem der Absterbeordnung zerfällt aber allem Anscheine nach in ein naturwissenschaftliches und in ein Wahrscheinlichkeits-Problem. Als ersteres wäre die Beziehung zwischen Konstitution und Lebenslänge zu bezeichnen, als letzteres die Fehlerstreuung anzusehen, welche an dem bloß wahrscheinlichen Ereignisse wahrzunehmen ist.

Fünfter Abschnitt.

Die Anwendungen der Wahrscheinlichkeitslehre im Versicherungswesen.

§ 43. Vorbemerkungen. In Rücksicht der Anwendung der Wahrscheinlichkeitslehre im Gebiete des Versicherungswesens können zwei Fragen ventiliert werden und zwar 1. ob die Fundierung des erwähnten Wissenszweiges dermalen durch die Wahrscheinlichkeitslehre erfolgt; 2. ob eine solche Fundierung überhaupt möglich ist.

Die Beantwortung der ersteren Frage liegt, weil die Frage nur historischer Natur ist, außerhalb der Theorie der Statistik, und es wird deshalb diesbetreffend nur kurz das folgende bemerkt. Daß die Wahrscheinlichkeitsrechnung im Gebiete der Schadenversicherung (Elementarversicherung) dermalen nicht angewendet wird, steht außer allem Zweifel; den genannten Versicherungszweigen fehlen Tarife und Rücklagensysteme im Sinne der Lebensversicherung gänzlich. Aber auch die Behandlung der Theoreme der Lebensversicherung, wenigstens im heutigen Umfange, erscheint ohne alle Wahrscheinlichkeitsrechnung möglich. Die Berechnungen der Prämien und Deckungskapitalien stützen sich allein auf den Satz, daß die einmal beobachteten Durchschnittsergebnisse der Statistik bei Wiederholung der Beobachtung nahezu wiederkehren und die Häufigkeit der Abweichung von bestimmter Größe mit der Größe selbst abnimmt. Über die Form des Gesetzes der Abweichungen wird keinerlei Voraussetzung gemacht und aus solcher Form demgemäß auch keinerlei Resultat gezogen. Und doch könnte die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung erst mit der Einführung eines Fehlergesetzes selbst ihren Anfang nehmen.

Die andere Frage jedoch, ob die Fundierung des Versicherungswesens auf der Wahrscheinlichkeitstheorie möglich sei, kann nach den Ergebnissen des dritten Abschnittes für die Lebensversicherung unbedingt, für die Invalidenversicherung unter gewissen Voraus-

setzungen für die Form des Betriebes bejaht werden. Bei solcher Erkenntnis scheint es aber, als ob die künftige Anwendung der Wahrscheinlichkeitslehre im Gebiete des Versicherungswesens die gesunde Entwickelung des Geschäftes erheblich zu fördern vermöchte; denn diese Anwendung gibt allein die Möglichkeit, die *notwendige und zureichende* Höhe der Prämien und Deckungskapitalien zu bestimmen.

In letzterer Beziehung wird folgendes hervorgehoben. Es ist bekannt, daß die Versicherungsgesellschaften die Prämien und Deckungskapitalien für die Lebensversicherungen in sehr verschiedener Art (nach sehr verschiedenen Rechnungsgrundlagen) bestimmen und zur Sicherheit überdies bedeutende Kapitalreserven anzusammeln pflegen. Die heutige Versicherungspraxis wählt nämlich ihre Rechnungsgrundlagen von vornherein derart (mit einem solchen Sicherheitskoeffizienten), daß die Versicherungswerte nach menschlicher Voraussicht auch bei ungünstigerem Geschäftsverlaufe zureichen und legt die in normalen Jahren entfallenden Gewinne großen Teils zurück; die Schätzung des Sicherheitskoeffizienten entbehrt aber dermalen aller Grundlage und kann danach hoch und niedrig sein. Demgegenüber muß festgehalten werden, daß die Versicherungsgesellschaften ebensowohl die zu geringen, als die zu hohen Versicherungswerte meiden müssen; die ersteren, weil sie zu ihrem Ruine führen, die letzteren, weil sie unwirtschaftlich sind.

Soll aber an Stelle der Willkür in der Wahl des Sicherheitskoeffizienten das genaue Maß, also an Stelle der Schätzung desselben die Berechnung treten, dann ist die Kenntnis und Benützung des seine Bestimmung ermöglichenden Fehlergesetzes der statistischen Massenerscheinungen unumgänglich, die Wahrscheinlichkeitsrechnung als Grundlage des Versicherungswesens unvermeidlich.

Aus diesen Erwägungen werden an dieser Stelle, unbekümmert um die dermalige Entwickelung der Praxis, alle die Theoreme zusammengestellt, deren ein auf der Wahrscheinlichkeitsrechnung fundiertes Versicherungswesen nicht entbehren kann. Es wird gezeigt, wie die statistischen Wahrscheinlichkeiten als Wahrscheinlichkeiten a posteriori zu ermitteln und wie die auf ihrem Grunde beobachteten Ereignisse zu beurteilen sind; welche Eigenschaften der darnach berechneten Prämie zukommen und welche Sonderrücklagen, welche Sicherheitskoeffizienten zu den auf wahrscheinlichsten Werten der Wahrscheinlichkeit aufgebauten Versicherungswerten hinzugefügt werden müssen, damit das Geschäft auf solider Basis abgeschlossen und geführt werden könne.

§ 44. Die Ermittlung statistischer Wahrscheinlichkeiten. Die Ermittlung statistischer Wahrscheinlichkeiten erfolgt, wie die aller Wahrscheinlichkeiten a posteriori, durch vielfache Beobachtung. Im Falle die statistischen Wahrscheinlichkeiten reine Wahrscheinlichkeiten oder Mittelwerte solcher sind, wird sich die Näherung an die wahren Werte jederzeit bestimmen lassen.

Hat man beispielsweise bei l Beobachtungen t Ereignisse gezählt und würde diesem statistischen Ereignisse eine Wahrscheinlichkeit x zugrundeliegen, dann wäre die Wahrscheinlichkeit des zusammengesetzten Ereignisses $\binom{l}{t} x^t (1-x)^{l-t}$; umgekehrt ist die Wahrscheinlichkeit, daß dem Ereignisse gerade die Wahrscheinlichkeit x zugrunde liegt,

$$w_x = \frac{x^t (1-x)^{l-t} dx}{\int_0^1 x^t (1-x)^{l-t} dx},$$

woraus sich sofort ergibt, daß

a) w_x ein Maximum für die Annahme $x = \frac{t}{l}$ erhält;

b) die Wahrscheinlichkeit für jeden Wert der Hypothese x unendlich klein ist;

c) die Wahrscheinlichkeit, es werde w_x irgend einer der Werte zwischen $\frac{t}{l} + \varepsilon$ und $\frac{t}{l} - \varepsilon$ sein,

$$\int_{\frac{t}{l}-\varepsilon}^{\frac{t}{l}+\varepsilon} x^t (1-x)^{l-t} dx : \int_0^1 x^t (1-x)^{l-t} dx$$

gleich kommt.

Substituiert man im Zähler für $x = \frac{t}{l} + u = p + u$, sohin für $1 - x = q - u$; setzt für

$$x^t (1-x)^{l-t} = e^{t \log (p+u) + (l-t) \log (q-u)} = p^t \cdot q^{l-t} e^{t \log \left(1 + \frac{u}{p}\right) + (l-t) \log \left(1 - \frac{u}{q}\right)};$$

entwickelt die Logarithmen nach Potenzen von u und bleibt bei der zweiten Potenz stehen, dann erhält man nach einigen leichten Transformationen für die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$p^t q^{l-t} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} e^{-\frac{u^2 l}{2pq}} du : \frac{t!\,(l-t)!}{(l+1)!}$$

Wendet man auf den Zähler die neuerliche Transformation

$$u \sqrt{\frac{l}{2pq}} = t,$$

auf den Nenner die Stirlingsche Näherungsformel $m! = m^m e^{-m} \sqrt{2\pi m}$ an, so übergeht der Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit in

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varepsilon \sqrt{\frac{l}{2pq}}} e^{-t^2} dt.$$

Daraus schließt man sofort, daß eine Wahrscheinlichkeit

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{c_1} e^{-t^2} dt$$

besteht, daß die den Versuchen zugrunde liegende Hypothese zwischen $p + c_1 \sqrt{\frac{2pq}{l}}$ und $p - c_1 \sqrt{\frac{2pq}{l}}$ liegen müsse. Speziell besteht eine Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$, daß der wahre Wert zwischen $0{,}477 \sqrt{\frac{2pq}{l}}$ und $-0{,}477 \sqrt{\frac{2pq}{l}}$ liegen werde und eine Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{20000}$, daß er jenseits des sechsfachen Betrages dieser beiden Grenzen zu liegen komme.

Nach den Beobachtungen des österr. Beamtenvereines während der Periode 1865—1888 wurden für das Alter 50 bei 9115,5 Lebenden 171 Tote gezählt. Die Sterbenswahrscheinlichkeit betrug 0,0188, der wahrscheinliche Fehler 0,0010. Es ist somit 1 gegen 1 zu wetten, daß die zugrundeliegende Wahrscheinlichkeit zwischen 0,0178 und 0,0198 gelegen war und 1 gegen 20000, daß sie nicht unter 0,0128 und über 0,0248 zu liegen kam.

Die in der Lebensversicherung verwendeten Wahrscheinlichkeiten sind meistenteils Produkte mehrfacher, beobachteter Wahrscheinlichkeiten. So ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine nulljährige Person das Alter n erreicht,

$$(1 - w_0)(1 - w_1)(1 - w_2) \cdots (1 - w_{n-1}),$$

daß sie im Alter von n Jahren sterbe,

$$(1 - w_0)(1 - w_1)(1 - w_2) \cdots (1 - w_{n-1}) \cdot w_n.$$

Die erstere mit irgend einer konstanten Zahl, in der Regel 10000, 100000 usw. multipliziert, geben die Ziffern der Absterbeordnung.

Man kann auch die Wahrscheinlichkeiten für irgend eine Bestimmung dieser kombinierten Wahrscheinlichkeiten leicht ermitteln. Haben sich nämlich für die unabhängig Veränderlichen einer Funktion von n Wahrscheinlichkeiten $x_1, x_2, \cdots, x_n$ die wahrscheinlichsten Werte $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ ergeben, worin

$$\xi_1 = \frac{t_1}{l_1},\ \xi_2 = \frac{t_2}{l_2},\ \xi_3 = \frac{t_3}{l_3},\ \cdots,\ \xi_n = \frac{t_n}{l_n}$$

und sind die Abweichungen der $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ von den $x_1, x_2, \cdots, x_n$ nur sehr kleine Größen erster Ordnung, dann besteht:

$$f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) = f(\xi_1 + \overline{x_1 - \xi_1},\ \xi_2 + \overline{x_2 - \xi_2},\ \cdots,\ \xi_n + \overline{x_n - \xi_n})$$
$$= f(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) + (x_1 - \xi_1)\frac{\partial f}{\partial \xi_1} + (x_2 - \xi_2)\frac{\partial f}{\partial \xi_2} + \cdots + (x_n - \xi_n)\frac{\partial f}{\partial \xi_n}.$$

Daraus folgt unmittelbar, daß die Summe der Quadrate der Abweichungen für irgendwelche stetige Funktionen der x Werte — insofern diese Abweichungen innerhalb bestimmter Grenzen liegen — auch durch die rechte Seite nachstehender Gleichung gegeben ist

$$[(f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) - f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots \xi_n))^2] = [(x_1 - \xi_1)^2]\left(\frac{\partial f}{\partial \xi_1}\right)^2$$
$$+ [(x_2 - \xi_2)^2]\left(\frac{\partial f}{\partial \xi_2}\right)^2 + \cdots + [(x_n - \xi_n)^2]\left(\frac{\partial f}{\partial \xi_n}\right)^2.$$

Für das obige Produkt $(1 - w_0)(1 - w_1)(1 - w_2)\cdots(1 - w_{n-1})w_n$, welches kurzweg mit Π bezeichnet werden soll, folgt

$$\frac{\partial f}{\partial w_0} = -\frac{\Pi}{1 - w_0},\ \frac{\partial f}{\partial w_1} = -\frac{\Pi}{1 - w_1}\cdots\frac{\partial f}{\partial w_{n-1}} = -\frac{\Pi}{1 - w_{n-1}},\ \frac{\partial f}{\partial w_n} = \frac{\Pi}{w_n}$$

und hieraus für die Quadratsumme der Fehlerquadrate

$$\Pi^2\left(\frac{[(w_0 - w_0')^2]}{(1 - w_0)^2} + \frac{[(w_1 - w_1')^2]}{(1 - w_1)^2} + \cdots + \frac{[(w_{n-1} - w_{n-1}')^2]}{(1 - w_{n-1})^2} + \frac{[(w_n - w_n')^2]}{w_n^2}\right).$$

Setzt man endlich, indem alle Beobachtungen über w_i zu einer einzigen Serie zusammengefaßt werden, für $[(w_i - w_i')^2] = \frac{w_i(1 - w_i)}{l_i}$, dann ist der reziproke Wert der Präzisionsmaßzahl

$$\Pi\sqrt{\frac{w_0}{l_0(1 - w_0)} + \frac{w_1}{l_1(1 - w_1)} + \cdots + \frac{w_{n-1}}{l_{n-1}(1 - w_{n-1})} + \frac{1 - w_n}{l_n w_n}}. \qquad (I)$$

In analoger Art folgt für den reziproken Wert der Präzisionsmaßzahl der Wahrscheinlichkeit

$$\Pi_1 = (1 - w_0)(1 - w_1)(1 - w_2)\cdots(1 - w_n)$$

der Ausdruck

$$\Pi_1\sqrt{\frac{w_0}{l_0(1 - w_0)} + \frac{w_1}{l_1(1 - w_1)} + \cdots + \frac{w_n}{l_n(1 - w_n)}}.$$

Hieraus folgt unmittelbar das selbstverständliche Theorem, *daß die Sicherheit der Angaben jeder Dekremententafel mit der Anzahl der sie zusammensetzenden Einzelwahrscheinlichkeiten abnimmt.* Gemäß den Beobachtungen der 4 französischen Gesellschaften über die Tafel A. F. hat sich ergeben:

im Alter	bei Lebenden	bei Sterbenden	die Sterbenswahrscheinlichkeit	der mittlere Fehler der Überlebenswahrscheinlichkeit in Prozenten der letzteren
0	1993	65	0,033	0,41
1	3902	121	0,031	0,49
2	5308	110	0,021	0,53
3	6663	98	0,015	0,55
4	7955	100	0,013	0,57
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

§ 45. Die Anwendung statistischer Ergebnisse. a) Man habe beobachtet, daß ein Ereignis unter l Fällen $t$mal eintritt. Es ist die Wahrscheinlichkeit zu suchen, daß das Ereignis bei λ neuen Versuchen τmal eintritt. Nach dem vorhergehenden Paragraphen läßt die erste Versuchsserie auf eine Wahrscheinlichkeit für den Wert der dem Ereignisse zugrunde liegenden Hypothese x

$$x^t(1-x)^{l-t}dx : \int_0^1 x^t(1-x)^{l-t}dx$$

zurückschließen. Die Wahrscheinlichkeit aber, daß bei dieser Hypothese unter λ Beobachtungen τ Ereignisse sich finden werden, ist:

$$\binom{\lambda}{\tau}x^\tau(1-x)^{\lambda-\tau}.$$

Demnach ist die Wahrscheinlichkeit, daß aus der ursprünglichen Beobachtung die Hypothese im Werte x gefolgert werden dürfe und unter dem gleichen Werte für die Hypothese das neue Ereignis zu erwarten steht, das Produkt der beiden letztangeschriebenen Wahrscheinlichkeiten. Die Wahrscheinlichkeit endlich, daß das neue Ereignis unter irgend welchen Werten für die zugrunde liegende Wahrscheinlichkeit eintreffen werde, ist die Summe der Produkte, wenn x alle möglichen Werte annimmt, sohin

$$\binom{\lambda}{\tau}\int_0^1 x^{t+\tau}(1-x)^{l+\lambda-t-\tau}dx : \int_0^1 x^t(1-x)^{l-t}dx.$$

Der Wert der letztabgeleiteten Wahrscheinlichkeit ist, sofern die ursprüngliche Beobachtung und λ unverändert bleiben, nur von τ abhängig. Er erhält demnach ein Maximum für

$$\binom{\lambda}{\tau-1}\int_0^1 x^{t+\tau-1}(1-x)^{l+\lambda-t-\tau+1}dx < \binom{\lambda}{\tau}\int_0^1 x^{t+\tau}(1-x)^{l+\lambda-t-\tau}dx >$$
$$\binom{\lambda}{\tau+1}\int_0^1 x^{t+\tau+1}(1-x)^{l+\lambda-t-\tau-1}dx.$$

Wenn man die Integrale durch die entsprechenden Faktoriellen ersetzt und dann die ganze Ungleichung durch den mittleren Wert dividiert, erhält man

$$\frac{(t+\tau+1)(\lambda-\tau)}{(l-t+\lambda-\tau)(\tau+1)} < 1 > \frac{(l+\lambda-t-\tau+1)\tau}{t+\tau)(\lambda-\tau+1)}.$$

Aus dem ersten Teile der Ungleichung folgt $\frac{t}{l} < \frac{\tau+1}{\lambda+1}$; aus dem zweiten Teile $\frac{t}{l} > \frac{\tau}{\lambda+1}$ und aus der Zusammenfassung beider Teile $\frac{t}{l} = \frac{\tau+\vartheta}{\lambda+1}$, wobei ϑ irgend einen zwischen Null und Eins gelegenen Wert bedeutet. Für große λ und τ kann man $\frac{t}{l} = \frac{\tau}{\lambda}$ setzen, woraus $\tau = \lambda \frac{t}{l} = \lambda p$ folgt.

Es ist wieder ganz unmittelbar ersichtlich, daß die Wahrscheinlichkeit für das Resultieren irgend eines bestimmten Wertes von τ nur sehr klein sein könne. Selbst für das eben berechnete Maximum ist sie nur

$$\frac{\lambda!}{(p\lambda)!(q\lambda)!} \frac{[p(l+\lambda)]![q(l+\lambda)]!}{(l+\lambda+1)!} \frac{(l+1)!}{(pl)!(ql)!}$$

oder, wie leicht ersichtlich, wenn man von der Stirlingschen Näherungsformel Gebrauch macht und entsprechend reduziert,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi pq\lambda}} \frac{1+\frac{\lambda}{l}}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{l+\lambda}\right)^3}}.$$ [1])

Man pflegt daher die Frage zu beantworten, welches die Wahrscheinlichkeit sei, daß τ irgendwo zwischen zwei endlichen Grenzen, welche vom Maximum gleich weit abstehen, gelegen ist. Für die Grenzen $\tau = p\lambda + z$ bis $p\lambda - z$ erhält man:

$$W_{-z}^{+z} = \sum_{-z}^{+z} \varrho \frac{\lambda!}{(p\lambda+\varrho)!(q\lambda-\varrho)!} \frac{(pl+\lambda+\varrho)!(ql+\lambda-\varrho)!}{(l+\lambda+1)!} \frac{(l+1)!}{(pl)!(ql)!}.$$

Setzt man behufs weiterer Behandlung des Ausdruckes unter der Summe

$$p\lambda = a,\ q\lambda = \alpha,\ p(l+\lambda) = b,\ q(l+\lambda) = \beta,$$

und hebt überdies das Maximum

$$W_0 = \frac{\lambda!}{(p\lambda)!(q\lambda)!} \frac{[p(l+\lambda)]![q(l+\lambda)]!}{(l+\lambda+1)!} \frac{(l+1)!}{(pl)!(ql)!}$$

1) Die Formel ist nur für sehr große l und λ brauchbar. Für $p = 0{,}01$, $l = 1000$ und $\lambda = 100$ wird der Ausdruck 0,44; unter übrigens gleichen Umständen und für $\lambda = 10$ sogar 1,27.

heraus, so erhält man für diesen

$$W_{-z}^{+z} = W_0 \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-\varrho+1)(b+1)(b+2)\cdots(b+\varrho)}{\beta(\beta-1)\cdots(\beta-\varrho+1)(a+1)(a+2)\cdots(a+\varrho)}.$$

In weiterer Reduktion der rechten Seite der letzten Gleichung wird der Faktor $\left(\frac{\alpha b}{a\beta}\right)^{\varrho} = 1$ ausgesondert, die ganze Gleichung logarithmiert und jeder Logarithmus unter der Voraussetzung, daß z, sohin auch jedes ϱ immer nur klein gegenüber a, α, b, β ist, in eine Potenzreihe entwickelt. Man erhält sodann bei Vernachlässigung aller Glieder einer höheren, als der ersten Ordnung der Kleinheit:

$$W_{-z}^{+z} = W_0 \sum_{-z}^{+z} e^{\frac{l}{2pq\lambda(l+\lambda)}(p-q)\varrho-\varrho^2} = W_0\left(1+2\sum_{0}^{z} e^{-\frac{l\varrho^2}{2pq\lambda(l+\lambda)}}\right)$$

$$= W_0\left[\int_0^z e^{-\frac{\varrho^2}{2pq\lambda\left(1+\frac{\lambda}{l}\right)}} d\varrho + e^{-\frac{z^2}{2pq\lambda\left(1+\frac{\lambda}{l}\right)}}\right]$$

Wird für W_0 der oben gefundene Wert eingesetzt, unter dem Integral für $\varrho = \sigma\sqrt{2pq\lambda\left(1+\frac{\lambda}{l}\right)}$ substituiert und endlich das ganze Zusatzglied vernachlässigt, dann gelangt man zu folgendem Schlusse:

Es besteht eine Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\gamma} e^{-t^2}dt$, *daß die Ereigniszahlen des neuerlichen Versuches zwischen* $\lambda p+\gamma\sqrt{2pq\lambda\left(1+\frac{\lambda}{l}\right)}$ *und* $\lambda p-\gamma\sqrt{2pq\lambda\left(1+\frac{\lambda}{l}\right)}$ *liegen; eine Wahrscheinlichkeit* $\frac{1}{2}$, *daß die Ereigniszahlen sich innerhalb dieser Grenzen bewegen werden, wenn* $\gamma = 0{,}477$ *und eine Wahrscheinlichkeit* $\frac{19{,}999}{20{,}000}$, *daß die Ereigniszahlen innerhalb dieser durch* $\gamma = 2{,}83$ *definierten Grenzen zu liegen kommen.*

Dieselben Wahrscheinlichkeiten bestehen selbstverständlich auch für die auf jeden einzelnen Versuchsfall kommende Abweichung $p \pm \gamma\sqrt{2pq\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{l}\right)}$.

Man kann den eben gefundenen Satz noch folgendermaßen aussprechen: *Zu gleicher Wahrscheinlichkeit a priori gehört der* $\sqrt{1+\frac{\lambda}{l}}$*fache Fehler der Wahrscheinlichkeit a posteriori, wenn* l *die Zahl der Grundbeobachtungen,* λ *die der Anwendungen bedeutet.* Für $l = \lambda$ wird der Fehler der Wahrscheinlichkeit a posteriori $\sqrt{2}$mal so groß, wie für eine Wahrscheinlichkeit a priori usf.

Die Folgerungen, welche man aus dieser Formel für die Praxis ableiten kann, sind weitgehender Natur. Es wird beispielsweise im Versicherungswesen nur dann ein klagloser Betrieb möglich sein, wenn sowohl l als λ, daher sowohl die Zahl der Versuche, auf welche sich die Wahrscheinlichkeit stützt, als die Zahl der Versicherungsfälle stetig zunimmt. Beruht die Tafelsterblichkeit auf unendlich vielen Beobachtungen, ist also $\frac{1}{l} = 0$, dann ist die Wahrscheinlichkeit der Abweichung für die Wahrscheinlichkeit a posteriori so groß, wie für die Wahrscheinlichkeit a priori; es besteht nämlich die Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt$ für den Fehler $\gamma \sqrt{\frac{2pq}{\lambda}}$; versucht man aber auf eine Wahrscheinlichkeit, welche durch eine endliche Zahl von Beobachtungen festgestellt wurde, eine unendliche Anzahl von Versicherungsfällen abzuschließen, dann wird jener Fehler $\gamma \sqrt{\frac{2pq}{l}}$, woraus man erkennt, daß der Fehler in den Grundtafeln durch einen noch so großen Umfang der Versicherungsgeschäfte nicht behoben werden kann.

Aus dieser Erkenntnis ergibt sich die Notwendigkeit, die Zahl der der Praxis zu unterstellenden Versuchsfälle stetig zu vergrößern und daher von Zeit zu Zeit immer wieder die Grundtafeln für die Sterblichkeits-, Invaliditäts- usw. Messungen zu erneuern.

b) Im Versicherungswesen werden die Wahrscheinlichkeiten a posteriori zumeist kombiniert und auf Grund jener kombinierten Wahrscheinlichkeiten Geschäfte abgeschlossen. Beispielsweise wird beobachtet, daß aus l_n Lebenden des Alters n binnen einem Jahre m_n Überlebende, aus l_{n+1} Lebenden des Alters $n+1$ m_{n+1} Überlebende ... allgemein aus l_{n+k} Lebenden des Alters $n+k$ m_{n+k} Überlebende hervorgegangen sind. Es entsteht dann die Aufgabe, die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, daß aus irgend einer Anzahl λ_n von Lebenden des Alters n irgend eine andere Anzahl μ_{n+k} von Überlebenden des Alters $n+k$ hervorgeht.

Um derartige Aufgaben zu lösen, wird man zunächst zweckmäßig die Kombination von *nur* zwei Fällen behandeln. Es sei demnach beobachtet worden, daß aus l_n Lebenden des Alters $n : m_n$ Überlebende aus l_{n+1} Lebenden des Alters $n+1 : m_{n+1}$ Überlebende hervorgehen und es werde die Wahrscheinlichkeit bestimmt, daß aus λ_n Lebenden des Alters $n : \mu_{n+1}$ Lebende des Alters $n+1$ resultieren.

Nach dem Vorausgesagten folgt zunächst, daß die wahrscheinlichste Zahl der Überlebenden des Alters n : $\lambda_n \frac{m_n}{l_n}$ ist, und eine Wahrscheinlichkeit für die Existenz von λ_n' Überlebenden besteht, welche $\frac{h_1}{\sqrt{\pi}} e^{-h_1^2\left(\lambda_n' - \lambda_n \frac{m_n}{l_n}\right)^2}$ gleichkommt; ferner, daß sodann die wahrscheinlichste Zahl der Überlebenden des Alters $n+1$: $\lambda_n' \frac{m_{n+1}}{l_{n+1}}$ ist, und eine Wahrscheinlichkeit $\frac{h_2}{\sqrt{\pi}} e^{-h_2^2\left(\mu_{n+1} - \lambda_n' \frac{m_{n+1}}{l_{n+1}}\right)^2}$ besteht, daß μ_{n+1} Überlebende resultieren. Aus diesen beiden Ergebnissen kann man schließen, daß die Wahrscheinlichkeit des gesuchten Endergebnisses

$$\frac{h_1 h_2}{\sqrt{\pi^2}} e^{-h_1^2\left(\lambda_n' - \lambda_n \frac{m_n}{l_n}\right)^2 - h_2^2\left(\mu_{n+1} - \lambda_n' \frac{m_{n+1}}{l_{n+1}}\right)^2}$$

sein müsse.

Weil aber aus der Zahl der Lebenden λ_n die Zahl der Überlebenden μ_{n+1} auf vielfache Art, nämlich durch alle zwischen μ_{n+1} und λ_n gelegenen λ_n' erhalten werden kann, wird man zur Wahrscheinlichkeit, daß aus λ_n Lebenden μ_{n+1} Überlebende erhalten werden können, gelangen, indem man über die eben gefundene Wahrscheinlichkeit nach diesen Grenzen summiert. Es ist sohin die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\sum_{\mu_{n+1}}^{\lambda_n} \frac{h_1 h_2}{\sqrt{\pi^2}} e^{-h_1^2\left(\lambda_n' - \lambda_n \frac{m_n}{l_n}\right)^2 - h_2^2\left(\mu_{n+1} - \lambda_n' \frac{m_{n+1}}{l_{n+1}}\right)^2}.$$

Bei diesen Entwicklungen bedeuten h_1 und h_2 die Präzisionsmaßzahlen, nämlich

$$h_1^2 = \frac{1}{2 p_n q_n \lambda_n \left(1 + \frac{\lambda_n}{l_n}\right)} \text{ und } h_2^2 = \frac{1}{2 p_{n+1} q_{n+1} \lambda_n' \left(1 + \frac{\lambda_n'}{l_{n+1}}\right)}.$$

Wenn man in der Präzisionsmaßzahl h_2 für $\lambda_n' = \lambda_n p_n$ setzt, ferner annehmen darf, daß die obige Summe nur wenig durch Hinzufügung jener Glieder irritiert wird, in welchen $\lambda_n' > \lambda_n$ und $< \mu_{n+1}$, endlich statt der Summe das Integral einführt und für $\lambda_n' - \lambda_n \frac{m_n}{l_n} = z_n$ und für

$$u_{n+1} - \lambda_n \frac{m_n}{l_n} \frac{m_{n+1}}{l_{n+1}} = z_{n+1}$$

substituiert, so erhält man

$$\frac{h_1 h_2}{\sqrt{\pi^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h_1^2 z_n^2 - h_2^2 \left(z_{n+1} - z_n \frac{m_{n+1}}{l_{n+1}}\right)^2} dz_n$$

und nach mehreren, sehr einfachen Transformationen

$$\frac{h_1 h_2}{\sqrt{\pi^2}} e^{-\frac{h_1^2 h_2^2 z_{n+1}^2}{h_1^2 + \frac{m_{n+1}^2}{l_{n+1}^2} h_2^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(h_1^2 + \frac{m_{n+1}^2}{l_{n+1}^2} h_2^2\right)\left(z_n - \frac{z_{n+1} h_2^2 \frac{m_{n+1}}{l_{n+1}}}{h_1^2 + \frac{m_{n+1}^2}{l_{n+1}^2} h_2^2}\right)^2} dz_n.$$

Nach Ausführung des Integrales erhält man für den letzten Ausdruck auch

$$\frac{1}{\sqrt{\pi \left(\frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{h_1^2} \frac{m_{n+1}^2}{l_{n+1}^2}\right)}} e^{-\frac{z_{n+1}^2}{\frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{h_1^2} \cdot \frac{m_{n+1}^2}{l_{n+1}^2}}}.$$

Endlich wird die Wahrscheinlichkeit, daß z_{n+1} irgend einen zwischen Null und γ gelegenen Wert annehmen könne, durch das Integral des Produktes dieses Ausdruckes und dz_{n+1} nach den Grenzen 0 bis γ bestimmt, und es besteht daher eine Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt$, daß

$$u_{n+1} = \lambda_n \frac{m_n}{l_n} \frac{m_{n+1}}{l_{n+1}} \pm \gamma \sqrt{\frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{h_1^2} \frac{m_{n+1}^2}{l_{n+1}^2}}.$$

Man kann aus dem eben gefundenen Ausdruck leicht die Wahrscheinlichkeiten ermitteln, daß das Endresultat aus der Kombination von 3 Grundfällen hervorgeht. Besteht nämlich die dritte Kombination in der weiteren Beobachtung, daß aus l_{n+2} Lebenden m_{n+2} Überlebende entstanden sind, und nennt man H die Präzisionsmaßzahl der vorausgehenden, h_3 die der letzten Kombination, dann erhält

man als Wahrscheinlichkeit, daß aus λ_n Lebenden schließlich μ_{n+2} Überlebende resultieren, wobei

$$\mu_{n+2} = \lambda_n \frac{m_n}{l_n}\frac{m_{n+1}}{l_{n+1}}\frac{m_{n+2}}{l_{n+2}} \pm \gamma \sqrt{\frac{1}{h_3^2} + \frac{1}{H^2}\frac{m_{n+2}^2}{l_{n+2}^2}},$$

wieder das Integral $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\gamma e^{-t^2} dt$.

Den Faktor bei γ kann man auch schreiben:

$$\sqrt{\frac{1}{h_3^2} + \frac{1}{h_2^2}\frac{m_{n+2}^2}{l_{n+2}^2} + \frac{1}{h_1^2}\frac{m_{n+2}^2}{l_{n+2}^2}\frac{m_{n+1}^2}{l_{n+1}^2}}.$$

Ganz allgemein besteht die Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\gamma e^{-t^2} dt$, daß für k Beobachtungen der wahrscheinlichste Wert des Ereignisses um höchstens

$$\pm \gamma \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{h_k^2} + \frac{1}{h_{k-1}^2}\frac{m_{n+k-1}^2}{l_{n+k-1}^2} + \frac{1}{h_{k-2}^2}\frac{m_{n+k-1}^2}{l_{n+k-1}^2}\frac{m_{n+k-2}^2}{l_{n+k-2}^2} + \cdots\right)} \qquad \text{(II)}$$

abweicht.

Setzt man in diesen Ausdruck den durch l, λ, p, q ausgedrückten Wert der Präzisionsmaßzahlen ein und bezeichnet mit

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n \frac{m_n}{l_n}; \text{ mit } \lambda_{n+2} = \lambda_n \frac{m_{n+1}}{l_{n+1}}\frac{m_n}{l_n} \text{ usf.;}$$

$$\text{mit } 1 - \frac{m_n}{l_n} = q_n,\ 1 - \frac{m_{n+1}}{l_{n+1}} = q_{n+1} \text{ usf.,}$$

so erhält man schließlich als Größe der Maximalabweichung

$$\lambda_{n+k+1}\sqrt{2}\sqrt{\left\{\frac{q_n}{p_n}\left(\frac{1}{\lambda_n} + \frac{1}{l_n}\right) + \frac{q_{n+1}}{p_{n+1}}\left(\frac{1}{\lambda_{n+1}} + \frac{1}{l_{n+1}}\right) + \frac{q_{n+2}}{p_{n+2}}\left(\frac{1}{\lambda_{n+2}} + \frac{1}{l_{n+2}}\right) + \cdots\right\}}. \qquad \text{(II}_1\text{)}$$

Daraus folgt unmittelbar, daß die Präzisionsmaßzahlen mit wachsender Anzahl der in Rechnung gezogenen Fälle stets abnehmen.

Die in der Versicherung beliebte Häufung von Beobachtungen für ein und dasselbe Resultat und die Anwendung komplizierter Formeln dient also keineswegs der Sicherheit der Ergebnisse. Vielmehr wäre mit Rücksicht auf diese letztere die Einfachheit der Versicherungskombinationen und die Herstellung von Grundlagen, aus welchen sich das Endresultat unmittelbar entnehmen ließe, wünschenswert.

§ 46. Die Versicherungsprämie. Alle Aufgaben der Prämienbemessung im Versicherungswesen lassen sich, sofern Wahrscheinlich-

keiten a posteriori dem Versicherungsfalle zugrunde liegen, auf die folgende Aufgabe zurückführen: „Man habe unter l Fällen t Ereignisse wahrgenommen; es werden λ Fälle der gleichen Art je für die Summe C versichert, wie groß ist die Prämie?“

Beträgt die letztere für jede Versicherung P, für λ Versicherungen λP, so muß durch diese Summe das Risiko jedes beliebigen Ausganges nach jeder möglichen Hypothese gedeckt sein. Die Wahrscheinlichkeit einer Hypothese x kann nun durch

$$x^t(1-x)^{l-t}dx : \int_0^1 x^t(1-x)^{l-t}dx;$$

das Risiko von τ Ereignisfällen nach der erwähnten Hypothese durch

$$\binom{\lambda}{\tau} C\tau x^{t+\tau}(1-x)^{l+\lambda-t-\tau}dx : \int_0^1 x^t(1-x)^{l-t}dx;$$

das Risiko aller möglichen Hypothesen und Resultate endlich durch

$$\sum_0^\lambda{}_\tau \binom{\lambda}{\tau} C\tau \int_0^1 x^{t+\tau}(1-x)^{l+\lambda-t-\tau}dx : \int_0^1 x^t(1-x)^{l-t}dx$$

versichert werden.

Wenn die Summe hinter das Integral geschafft und beachtet wird, daß

$$\sum_0^\lambda{}_\tau \tau \binom{\lambda}{\tau} x^\tau(1-x)^{\lambda-\tau} = x \frac{\partial}{\partial x}\left[x+1-x\right]^\lambda$$

ist, wobei die partielle Differentiation sich nur auf x, nicht aber auf $1-x$ erstreckt, so erhält man für die Prämie der Gesamtheit

$$\lambda P = \lambda C \int_0^1 x^{t+1}(1-x)^{l-t}dx : \int_0^1 x^t(1-x)^{l-t}dx$$

und endlich für die Prämie jedes einzelnen Versicherten:

$$P = C\frac{t+1}{l+2},$$

welcher Wert für sehr große l und t mit $P = C\frac{t}{l}$ zusammenfällt.

Die Prämie des Versicherers kommt demnach dem Produkt aus der Versicherungssumme und der Wahrscheinlichkeit des Eintrittes des Versicherungsfalles, also der sogenannten mathematischen Erwartung gleich.

Aus den Sätzen des vorigen Paragraphen folgt sodann unmittelbar:

1. Die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn oder Verlust in der Größe $\gamma C\sqrt{2pq\lambda}$ einer Wahrscheinlichkeit a priori ist ebenso groß, wie die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn oder Verlust in der

Größe $\gamma \lambda C \sqrt{2pq\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{l}\right)}$ einer Wahrscheinlichkeit a posteriori, nämlich $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt$.

2. Wenn ein Versicherungsfall sich auf den sukzessiven Eintritt mehrerer Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots p_n$ stützt, dann ist die Prämie $Cp_1p_2 \ldots p_n$ und es besteht eine Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt$, für einen Gewinn oder Verlust

$$\gamma \lambda_{n+1} C \sqrt{2} \sqrt{\frac{q_1}{p_1}\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{l_1}\right)+\frac{q_2}{p_2}\left(\frac{1}{\lambda_2}+\frac{1}{l_2}\right)+\cdots}$$

bei einer Wahrscheinlichkeit a posteriori.

In Erweiterung dieser Theoreme kann man ferner ableiten:

3. Wenn λ_1 Versicherungen auf die Wahrscheinlichkeit p_1 für die Versicherungssumme C_1, λ_2 Versicherungen auf die Wahrscheinlichkeit p_2 für die Versicherungssumne C_2, ... allgemein λ_n Versicherungen auf die Wahrscheinlichkeit p_n für die Versicherungssumme C_n abgeschlossen werden und $p_1, p_2, \ldots, p_n$ Wahrscheinlichkeiten a priori sind, dann besteht die Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt$, die Summe

$$\gamma \sqrt{2(\lambda_1 C_1^2 p_1 q_1 + \lambda_2 C_2^2 p_2 q_2 + \cdots \lambda_n C_n^2 p_n q_n)} \qquad \text{(IV)}$$

zu verlieren.

Der Beweis dieses Satzes kann in mannigfacher Art erbracht werden. Für zwei Gattungen von Versicherungen mit den Präzisionsmaßzahlen $h_1^2 = \frac{1}{2\lambda_1 p_1 q_1}$ und $h_2^2 = \frac{1}{2\lambda_2 p_2 q_2}$ besteht eine Wahrscheinlichkeit der Abweichung von den wahrscheinlichsten Werten um z_1 und z_2 in der Größe $\frac{h_1 h_2}{\sqrt{\pi^2}} e^{-h_1^2 z_1^2 - h_2^2 z_2^2} dz_1 dz_2$ und eine Wahrscheinlichkeit, einen Gewinn oder Verlust zu erleiden, welcher sich zwischen $V > C_1 z_1 + C_2 z_2 > -V$ hält, in der Größe:

$$\frac{h_1 h_2}{\sqrt{\pi^2}} \int\int e^{-h_1^2 z_1^2 - h_2^2 z_2^2} dz_1 dz_2,$$

wobei die Grenzen der Integrale die obige Ungleichung erfüllen müssen. Substituiert man nun $u = C_1 z_1 + C_2 z_2$ und $du = C_2 dz_2$, dann kann das obige Integral geschrieben werden:

$$\frac{h_1 h_2}{C_2}\int_{-V}^{+V} du \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h_1^2 z_1^2 - \frac{h_2^2}{C_2^2}(u - C_1 z_1)^2} dz_1 = \frac{h_1 h_2}{\sqrt{\pi(C_2^2 h_1^2 + h_2^2 C_1^2)}} \int_{-V}^{+V} e^{-\frac{h_1^2 h_2^2 u^2}{C_2^2 h_1^2 + C_1^2 h_2^2}} du.$$

Daraus folgt unmittelbar, daß eine Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt$ besteht, daß die Abweichung $V = \gamma\sqrt{\frac{C_1^2}{h_1^2} + \frac{C_2^2}{h_2^2}}$ beträgt.

Nachdem gemäß 1. die zur selben Wahrscheinlichkeit bei einer einzigen Ursache gehörige Abweichungsgrenze $\gamma\sqrt{\frac{C^2}{h^2}}$ ist, so folgt, daß die zu einer Wahrscheinlichkeit gehörige Abweichungsgrenze zweier Ursachen der Quadratwurzel aus der Quadratsumme der Abweichungsgrenzen der einzelnen Ursachen für dieselbe Wahrscheinlichkeit gleich kommt. Der Satz IV ist lediglich die Erweiterung dieses Satzes auf beliebig viele Ursachen.

4. Für Wahrscheinlichkeiten a posteriori geht die Gleichung IV über in

$$\gamma\sqrt{2}\sqrt{\lambda_1 C_1^2 p_1 q_1\left(1 + \frac{\lambda_1}{l_1}\right) + \lambda_2 C_2^2 p_2 q_2\left(1 + \frac{\lambda_2}{l_2}\right) + \cdots} \qquad (IV^1)$$

§ 47. Das mathematische Risiko. Das Versicherungsgeschäft ist — vom wahrscheinlichkeits-theoretischen Standpunkte allein betrachtet — ein sehr riskantes Geschäft. Weil nämlich der Versicherer dasselbe auf dem Grundsatze der Gleichheit von Leistung und Gegenleistung betreibt und stets denselben Einsatz (Aktienkapital, Gründungsfond usw.) gegenüber einer sehr großen und wechselnden Anzahl von Versicherungsnehmern wagt, so muß einmal auch der Zeitpunkt kommen, wo der Verlust die Größe seiner Fonds übersteigt.

Um diesen Fall — auch im Interesse der Versicherungsnehmer — tunlichst hintanzuhalten, sucht der Versicherer durch mannigfache Maßnahmen seine Verlustchance zu verringern. Solches geschieht beispielsweise in der Lebensversicherung durch Zuschläge zur Nettoprämie und die Selektion der Risken, in der Elementarversicherung eben durch dieselben Mittel, durch eine entsprechende Tarif- ev. Rückversicherungs-Politik. Von rein rechnerischem Standpunkte kommt jedes dieser Mittel der Einhebung einer Prämie gleich, welche größer ist als die Bedarfsprämie. Einer mathematischen Behandlung werden dieselben allerdings erst dadurch fähig, wenn über die Größe der Mehrprämie irgend eine Annahme gemacht wird.

Unter dem mathematischen Risiko versteht man nun einen Zuschlag, welcher die Rückversicherung bis zur Höhe des zu gewärtigenden Verlustes (nämlich der Differenz von versichertem Kapital und Prämie) ermöglichen soll.

Besteht beispielsweise die Wahrscheinlichkeit p, die versicherte Summe C zu verlieren, dann ist Cp die Nettoprämie. Der Verlust des Versicherers ist sohin — wenn der Versicherungsfall eintritt — $C - Cp$, und weil der Verlust selbst die Wahrscheinlichkeit p hat, so beträgt die Rückversicherungsprämie Cpq.[1])

Beispielsweise beträgt das mathematische Risiko im Würfelspiel auf das Erscheinen einer bestimmten Zahl $^5/_{36}$ des Gewinnstes.

Das für das mathematische Risiko zu beantwortende allgemeine Problem lautet: Ein Versicherer will die möglichen Verluste bei λ_1 Versicherungen von der Wahrscheinlichkeit p_1 je mit der Versicherungssumme C_1; bei λ_2 Versicherungen von der Wahrscheinlichkeit p_2 je mit der Versicherungsumme $C_2, \ldots$ allgemein bei λ_i Versicherungen von der Wahrscheinlichkeit p_i je mit der Versicherungssumme C_i bei einem Rückversicherer sicher stellen; welche Prämie ist hiefür zu entrichten?

Für den speziellen Fall, daß alle Versicherungen von einerlei Wahrscheinlichkeit und Versicherungssumme sind, ist es leicht zu lösen. Die Wahrscheinlichkeit nämlich, daß unter n Versicherungen gerade ϱ Fälle eintreffen werden, ist $\binom{n}{\varrho} p^\varrho q^{n-\varrho}$; die Prämie, die der Rückversicherer für diesen Fall verlangen wird,

$$C(\varrho - np)\binom{n}{\varrho} p^\varrho q^{n-\varrho}$$

für $\varrho - np > 0$, oder wenn man für $\varrho = np + z$ setzt,

$$Cz\binom{n}{np+z} p^{np+z} q^{nq-z} = \frac{Cz}{\sqrt{2npq\pi}} e^{-\frac{z^2}{2npq}}.$$

1 Durch das mathematische Risiko erfolgt keineswegs die *vollständige* Sicherung des Versicherers. Zu dieser müßte der Versicherer vielmehr noch eine weitere Prämie einheben, damit auch dem Rückversicherer Gelegenheit gegeben werde, sein eigenes Risiko zu decken; sodann eine Prämie, damit auch der zweite Rückversicherer bei einem dritten Rückversicherer Deckung finden könne usf.

Die hierfür vom Versicherungsnehmer einzuhebende Gesamtheit der Prämien beträgt — wie man durch einfache Erwägungen findet —

$$P = C[p + pq + pq^2 + pq^3 + \cdots] = Cp\,\frac{1}{1-q} = C$$

und kommt daher der versicherten Summe selbst gleich.

Die Gesamtsumme der Prämie P, welche demnach für irgend einen Verlust zu fordern ist, kommt gleich

$$P = \frac{C}{\sqrt{2npq\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{2npq}} \cdot z\,dz = \sqrt{\frac{npq}{2\pi}} = 0{,}3989\sqrt{npq}, \qquad (V)$$

oder rund $0{,}4\sqrt{npq}$.

Im allgemeinen Problem ist der Verlust

$$V = C_1 z_1 + C_2 z_2 + \cdots + C_n z_n$$

mit der Wahrscheinlichkeit

$$\frac{h_1 h_2 \cdots h_n}{\sqrt{\pi^n}} e^{-[h_i^2 z_i^2]}\, dz_1\, dz_2 \ldots dz_n$$

zu erwarten, wenn $h_i^2 = \frac{1}{2\lambda_i p_i q_i}$ bedeutet.

Hieraus ergibt sich unmittelbar, daß an den Rückversicherer für den Verlust V die Prämie

$$P = \Sigma V \frac{h_1 h_2 \cdots h_n}{\sqrt{\pi^n}} e^{-[h_i^2 z_i^2]}\, dz_1\, dz_2 \ldots dz_n$$

zu zahlen sein wird. Die Summe muß hierbei über alle $z_1, z_2 \cdots z_n$ genommen werden, welche überhaupt die Gleichung $V = \Sigma C_i z_i$ erfüllen. Bei zwei verschiedenen Gattungen von Versicherungen lautet die Formel für die Prämie

$$P = \Sigma(C_1 z_1 + C_2 z_2) \frac{h_1 h_2}{\pi} e^{-h_1^2 z_1^2 - h_2^2 z_2^2}\, dz_1\, dz_2.$$

Benützt man die Beziehung $V = C_1 z_1 + C_2 z_2$ zur Elimination von z_2 und übergeht von der Summe zum Integral, dann erhält man zunächst für die Teilsumme Π nach z_1

$$\Pi = \frac{V h_1 h_2}{\pi} dz_2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h_1^2 z_1^2 - \frac{h_2^2}{C_2^2}(V - C_1 z_1)^2}\, dz_1.$$

Nach einigen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung vielfach vorkommenden Transformationen ergibt sich hieraus

$$\Pi = \frac{V h_1 h_2}{\sqrt{\pi}} \frac{C_2}{\sqrt{C_2^2 h_1^2 + h_2^2 C_1^2}} e^{-\frac{V^2 h_1^2 h_2^2 C_2^2}{C_2^2 h_1^2 + h_2^2 C_1^2}} dz_2.$$

Kommt endlich der Versicherer für jeden beliebigen (positiven) zwischen $V = 0$ und $V = \infty$ gelegenen Verlust auf, dann ist auch die letztere Prämie noch über alle möglichen V zu summieren. Es resultiert schließlich als mathematisches Risiko:

$$M = 0{,}3989\sqrt{C_1^2 \lambda_1 p_1 q_1 + C_2^2 \lambda_2 p_2 q_2}.$$

Die Ausdehnung der Rechnung auf beliebig viele Versicherungen ergibt als mathematisches Risiko im allgemeinen

$$M = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\Sigma C_i^2 \lambda_i p_i q_i}, \qquad \text{(VI)}$$

wobei die Summe über alle Werte von $i = 1, 2 \cdots n$ zu erstrecken sein wird.

Zu dieser Formel ist noch das Folgende hervorzuheben: Nach den Ausführungen im vorigen Paragraph beträgt die Wahrscheinlichkeit, daß für den Unternehmer ein zwischen 0 und $\gamma \sqrt{\Sigma C_i^2 \lambda_i p_i q_i}$ gelegener Gewinn oder Verlust eintritt: $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt$; es beträgt insbesondere die Wahrscheinlichkeit, daß der Gewinn oder Verlust sich in den Grenzen $0{,}3989 \sqrt{\Sigma C_i^2 \lambda_i p_i q_i}$ bewegt, 0,423. Durch das mathematische Risiko erscheinen sohin von der Einheit der Eventualitäten 0,214 Verlustfälle gedeckt. Weil aber die Gewinnfälle — also die Hälfte aller Versicherungsfälle — überhaupt nicht zum Schaden des Versicherers ausfallen, so erscheint der Versicherer bei 1000 Fällen durch das mathematische Risiko in 714 Fällen vor Unterbilanzen geschützt.

§ 48. Anwendungen der Theorie des mathematischen Risikos. Man gebraucht die Theorie des mathematischen Risikos einerseits zur tatsächlichen Berechnung von Risiko-*Prämien* und Risiko-*Reserven*, andererseits zur Aufstellung gewisser allgemeiner versicherungstechnischer Prinzipien.

A. In ersterer Beziehung ist zu bemerken, daß die Formel zwar zunächst nur für *gleichzeitige* Versicherungen an *verschiedenen* Individuen aufgestellt ist, daß aber für die Anwendung auf Versicherungen derselben Person zu verschiedenen Zeiten kein Hindernis besteht, weil die Voraussetzung für die Ableitung der Formeln die Unabhängigkeit der Wahrscheinlichkeiten ist und diese auch bei den letzteren Wahrscheinlichkeiten erfüllt wird.

In der *einfachen Kapitalversicherung auf den Todesfall* sind beispielsweise die Werte der versicherten Summen $e, e^2, e^3, \cdots e^n$ mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, p_3 \cdots, p_n$ in Rechnung zu ziehen. Hierin bedeuten e^i die Potenzen des Abzinsungsfaktors und

$$p_1 = w_1,$$
$$p_2 = (1 - w_1) w_2,$$
$$p_3 = (1 - w_1)(1 - w_2) w_3$$

usw. Es ist sohin das mathematische Risiko (für P als der Einmalprämie für die Versicherung und $c = 0{,}4$)

$$M_P = c \sqrt{\sum_{i=1\cdots n} (e^i - P)^2 p_i q_i}. \qquad \text{(VII)}$$

In der *Leibrentenversicherung* betragen die versicherten Summen

$$1, \quad 1+e, \quad 1+e+e^2, \quad 1+e+e^2+\cdots+e^{n-1}$$

oder

$$\frac{1-e}{1-e}, \quad \frac{1-e^2}{1-e}, \quad \frac{1-e^3}{1-e}, \quad \frac{1-e^n}{1-e}$$

und das mathematische Risiko

$$M_R = c \sqrt{\sum_{i=1,2\cdots n} \left(\frac{1-e^i}{1-e} - R\right)^2 p_i q_i},$$

worin R die Einmalprämie für die Leibrente bezeichnet. Wenn zur Umwandlung der letzteren Formel die bekannte Relation $R = \frac{1-P}{1-e}$ benützt wird, erhält man zunächst

$$M_R = c \sqrt{\sum_{i=1,2,\cdots n} \frac{1}{(1-e)^2} (e^i - P)^2 p_i q_i}$$

und hieraus die Relation

$$M_R = \frac{1}{1-e} M_P \quad \text{oder auch} \quad M_P \frac{dR}{dP}. \qquad \text{(VIII)}$$

Das mathematische Risiko der Leibrentenversicherung kommt demnach dem Produkte des mathematischen Risikos der Todesfallversicherung und des Differentialquotienten der Leibrenten- in die Todesfallprämie gleich.

Man kann den letzteren Satz ohne weiteres verallgemeinern.

Alle Lebensversicherungen lassen sich bekanntlich auf zwei Grundformen, die Leibrentenversicherung oder Todesfallversicherung zurückführen, weil sie der Ausdruck für die Bedingung sind, daß eine gewisse gleichmäßige oder veränderliche Summe bis zum Eintritt des Todes oder mit dem Tode gezahlt wird. Und weil zwischen Leibrente und Todesfallversicherung auch eine einfache Beziehung besteht, so ist die Zurückführung aller Formen der Lebensversicherung auf eine einzige Grundform möglich. Nun ist das mathematische Risiko nichts anderes, als der 0,4fache Betrag der Wurzel aus der Quadratsumme zwischen der Durchschnittsprämie uud den tatsächlichen Entschädigungen, jedes dieser Quadrate multipliziert mit einem gewissen für alle Versicherungskombinationen gleichen Faktor $p_i q_i$. Daraus folgt aber, wie man beweisen kann, daß aus dem mathematischen Risiko irgend einer Versicherungsart das einer andern Versicherungsart

gefunden wird, wenn man das letztere durch den Differentialquotienten der Prämie des ersteren in die Prämie des letzteren dividiert.

Besteht nämlich zwischen den Prämien zweier Versicherungskombinationen die Beziehung

$$\Pi = f(P),$$

dann muß sich wegen der vollständigen Unabhängigkeit der p_i die Leistung des Versicherers A_i im i^{ten} Versicherungsjahre nach der Versicherungskombination $f(P)$ als gleiche Funktion der Leistung L_i darstellen lassen.

Wird nun das mathematische Risiko zur Prämie P mit M_P bezeichnet, dann ist das mathematische Risiko zur Prämie $f(P)$

$$M_{f(P)} = c\sqrt{\Sigma}(f\,L_i - f\,P_i)^2 p_i q_i .$$

Wird auf der rechten Seite der Gleichung von den Beziehungen

$$f(L_i) = f(o) + L_i\left(\frac{df(L_i}{dL_i}\right)_0 \quad \text{und} \quad f(P) = f(o) + P\left(\frac{df(P_i}{dP}\right)_0$$

Gebrauch gemacht, so erhält man unmittelbar

$$M_{f(P)} = c\sqrt{\Sigma}(L_i - P)^2 p_i q_i \cdot \left(\frac{df}{dP}\right)^2$$

oder endlich

$$M_{f(P} = \frac{df}{dP} M_P. \qquad \text{(IX)}$$

Wittstein hat in seinem mathematischen Risiko der Versicherungsgesellschaften das mathematische Risiko der Leibrenten zu 4% nach der Sterblichkeitstafel der Hannoverschen Lebensversicherungsanstalt berechnet und als Risiko für eine Person gefunden:

Alter	Wert der pränumerando Leibrente	Mathematisches Risiko	Mathematisches Risiko in Prozenten zur Rente
30	17,634	2,088	11,8
40	15,463	2,088	13,5
50	12,825	1,996	15,6
60	9,723	1,814	18,7
70	6,707	1,483	22,1
80	4,357	0,971	22,3

Als mathematisches Risiko für die Todesfallversicherung ergibt sich:

Alter	Wert der Einmalprämie	Mathematisches Risiko	Mathematisches Risiko in Prozenten zur Prämie
30	0,328	0,082	24,9
40	0,413	0,082	19,8
50	0,517	0,078	15,2
60	0,638	0,071	11,1
70	0,757	0,058	7,7
80	0,849	0,038	4,5

Zusatz: Man kann aus den Formeln VI und IX nicht nur, wie oben, das mathematische Risiko einer *Einzelversicherung* zu *Beginn*,

sondern diesen Wert für den *Verlauf* der Versicherung und schließlich das mathematische Risiko für einen *Versicherungsbestand* ermitteln. Derartige Entwickelungen, ebenso wie die Umgestaltung der Formeln für die praktische Handhabung, gehören jedoch dem Gebiete der Versicherungsmathematik an und werden demnach hier nicht berücksichtigt.

B. Man kann auf Grund der Theorie vom mathematischen Risiko die Frage beantworten, wie groß bei einem Versicherungsabschluß auf ein großes Kapital die Summe sein dürfe, welche ein Versicherer auf eigenes Risiko behalten könne und welche Summe er vernünftigerweise in Rückversicherung geben müsse. Stellt man nämlich den Grundsatz auf, daß durch die Übernahme einer Versicherung das auf die Einheit entfallende Gesamtrisiko des Versicherungsbestandes keine Steigerung erfahren dürfe, bezeichnet man das mathematische Risiko außerhalb des neuen Vertrages mit $c\sqrt{A}$, die neu zu versichernde Summe mit δ, die Wahrscheinlichkeit für das versicherte Ereignis mit p, endlich die gesamte Versicherungssumme mit S, dann ist das Verhältnis des mathematischen Risikos zur Versicherungssumme vor Abschluß des Vertrages

$$\frac{c\sqrt{A}}{S},$$

das entsprechende Verhältnis nach Abschluß des Vertrages

$$\frac{c\sqrt{A}+\overline{\delta^2 pq}}{S+\delta}$$

und die Bedingungsgleichung für das Maximum des Eigenbehaltes

$$\frac{\sqrt{A}}{S}=\frac{\sqrt{A+\delta^2 pq}}{S+\delta}.$$

Hieraus folgt

$$\delta=\frac{2AS}{pqS^2-A}. \qquad (X)$$

Für den Fall, daß bisher nur Versicherungen auf die Summe C und zwar in der Anzahl n geschlossen werden und für alle Verträge die gleiche Wahrscheinlichkeit besteht, wird $A=nC^2pq$, $S=nC$ und endlich $\delta=\frac{2nC}{n-1}$.

In einem Versicherungsstock mit völlig gleichen und gleich wahrscheinlichen Risken darf der Eigenbehalt nicht die doppelte Summe des Durchschnittsrisikos überschreiten.

Sechster Abschnitt.

Die Theorie der Ausgleichung.

§ 49. Die Definition der Ausgleichung. In den vorausgehenden Kapiteln wurde auseinandergesetzt, auf welche Art man die wahrscheinlichsten Werte von einzelnen Wahrscheinlichkeiten ermittelt. Diese Methoden sind auch dann brauchbar, wenn mehrere Wahrscheinlichkeiten, welche zu derselben Erscheinung, aber zu verschiedenen Werten der unabhängig Veränderlichen (des Alters) gehören, beobachtet werden sollen. Hierbei geschieht es nicht selten, daß sich die gefundenen wahrscheinlichsten Werte in dem Sinne widersprechen, daß in einer Wertefolge der unabhängig Veränderlichen, für welche naturgemäß das stete Wachstum oder die stete Abnahme der Funktion erwartet wird, Unterbrechungen dieser Zu- oder Abnahme „Diskontinuitäten" konstatiert werden. Beispielsweise wird häufig in den Altersklassen der Absterbeordnung, für welche mit zunehmendem Alter eine stete Steigerung der Sterbenswahrscheinlichkeiten zu erwarten ist, ein *Schwanken* der sukzessiven Werte *mit steter Tendenz zur Steigerung* wahrgenommen.

So hat sich für die 100fachen wahrscheinlichsten Werte der Sterbenswahrscheinlichkeiten in den Altern der Altersklasse 41—50 die folgende Wertereihe ergeben:

Alter	Absterbeordnungen für Ablebensversicherungen		
	beide Geschlechter Französische Tafel	Männer Gothaer Tafel, 8. u. ff. Versicherungsjahre	Männer mit Gewinn (neu und alt) Englische Erfahrungen
41	1,08	0,90	0,96
42	1,08	0,96	1,01
43	1,11	1,07	1,08
44	1,15	*1,01*	1,13
45	1,20	1,13	*1,12*
46	1,32	*1,07*	1,21
47	1,45	1,26	1,23
48	*1,42*	1,29	1,39
49	*1,40*	1,31	1,41
50	1,67	1,55	1,53

Ein solches Schwanken ist in der französischen Tafel bei den Altern 48, 49, in der Gothaer Tafel in den Altern 44, 46 und in der englischen Tafel im Alter 45 zu verzeichnen.

In dem vorliegenden Abschnitte werden Methoden gesucht, die wahrscheinlichsten Werte der Wahrscheinlichkeiten nachträglich derart abzuändern, daß einer bestimmten Erwartung genügt wird. Man nennt jede solche nachträgliche Abänderung der wahrscheinlichsten Werte eine Ausgleichung. Schon aus dieser Definition folgt, daß das Ausgleichsproblem selbst gänzlich unbestimmt ist, weil die Erwartung an sich mannigfaltig sein und jeder *Art* der Erwartung ein vielfacher Ausdruck verliehen werden kann. Nur *eine* Forderung dürfte von allen Ausgleichern als zweckmäßig anerkannt werden, nämlich die, daß die ausgeglichene Reihe die Wahrscheinlichkeit des gleichzeitigen Bestehens aller Beobachtungsresultate mit Rücksicht auf die Erwartung zu einem Maximum macht. Man kann dieser Bedingung auch die Form einer Gleichung geben und letztere als Definitionsgleichung der Ausgleichung oder kurzweg als Ausgleichsgleichung bezeichnen. Ihre Ableitung erfolgt in nachstehender Art:

Wenn in irgend einem von n Werten $(1, 2, 3, \cdots n)$ der unabhängig Veränderlichen beispielsweise in i unter l_i Versuchen t_i Ereigniszahlen beobachtet wurden, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß diesem Ergebnis ein Wert der Wahrscheinlichkeit y_i zugrunde liegt,

$$W_i = y_i^{t_i}(1-y_i)^{l_i-t_i}\,dy_i : \int_0^1 y_i^{t_i}(1-y_i)^{l_i-t_i}\,dy_i.$$

Hierbei ist auf die Erwartung noch keinerlei Rücksicht genommen.

Um zu einem analytischen Ausdruck für diese zu gelangen, wird man zu erwägen haben, daß sie füglich auf keine andere Quelle als die Erfahrung zurückgeführt werden kann und diese wieder nur in einem Wahrscheinlichkeitsurteile den Ausdruck zu finden vermag.

Für ein solches hat man bisher zwei, zur weiteren analytischen Behandlung taugliche Formen aufgestellt und zwar: 1. Die Erfahrung reicht zur Fundierung eines bis auf wenige völlig willkürliche Konstante bekannten Gesetzes (beispielsweise die Erfahrungen rücksichtlich der Absterbeordnung zur Fundierung der Gompertz-Makehamschen Formel) aus. 2. Es wird gemäß einer vorausgehenden Erfahrungsreihe einer bestimmten Beziehung von Nachbarwerten, also den speziellen Werten $\mu, \Delta\mu, \Delta^2\mu, \ldots \Delta^k\mu$ von $y, \Delta y, \Delta^2 y, \ldots \Delta^k y$, eine größere Wahrscheinlichkeit als anderen dieser Beziehungen beigemessen und es

nimmt die Wahrscheinlichkeit jeder anderen Beziehung mit steigenden Differenzen $y - \mu$, $\Delta y - \Delta \mu$, $\ldots \Delta^k y - \Delta^k \mu$ ab.

Um die Ausgleichsgleichung für die erstere Form der Erwartung aufzustellen, kann man unmittelbar von dem obigen Ausdruck für W_i ausgehen, indem man festsetzt, daß unter den y_i keine anderen, als Funktionen der zugelassenen Funktionsform vorkommen.

Es ist dann die Wahrscheinlichkeit, daß den Beobachtungen in den gegebenen n Punkten die Wahrscheinlichkeitswerte $y_1, y_2, \ldots y_n$ zugrunde liegen:

$$W_1 W_2 W_3 \cdots W_n = e^{\sum_1^n i \log W_i}.$$

Nach der Natur der Exponentiellen, nur dort ein Maximum zu besitzen, wo das Argument ein solches aufweist, wird es zweckmäßig sein, die Maximumbedingung nicht direkt, sondern für den Ausdruck

$$\sum_1^n i \log W_i = \sum_1^n i \left[t_i \log y_i + (l_i - t_i) \log (1 - y_i) + \log dy_i - \log \int_0^1 y_i^{t_i} (1 - y_i)^{l_i - t_i} dy_i \right]$$

zu entwickeln.

Eine derartige Maximumbedingung wird aber durch die Variationsrechnung formuliert. Die größte Wahrscheinlichkeit findet sich nämlich unter jenen Funktionen, welche die erste Variation der rechten Seite zu Null machen.

Nachdem das bestimmte Integral unter der Summe $\frac{t_i!\,(l_i - t_i)!}{(l_i + 1)!}$, demnach konstant ist, so lautet die Ausgleichsgleichung

$$\sum_1^n i \left(\frac{t_i}{y_i} + \frac{l_i - t_i}{1 - y_i} \right) \delta y_i = \sum_1^n i \frac{l_i}{y_i (1 - y_i)} \left(\frac{t_i}{l_i} - y_i \right) \delta y_i = 0. \qquad \text{(I)}$$

Setzt man hierin $\frac{t_i}{l_i} = w_i$, also dem wahrscheinlichsten Werte der Wahrscheinlichkeit, gleich und wählt für $\frac{l_i}{y_i (1 - y_i)}$ in erster Näherung $\frac{l_i}{w_i (1 - w_i)} = p_i$, das Gewicht, so übergeht die Ausgleichsgleichung in

$$\sum_1^n i\, p_i (w_i - y_i) \delta y_i = 0. \qquad \text{(I')}$$

Die weitere Behandlung dieser Form kann nicht ohne Berücksichtigung der speziellen Natur der erwarteten Funktion erfolgen.

Zur Aufstellung der Ausgleichsgleichung für die zweite Form der Erwartung wird man zunächst einen Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit irgend eines Systemes y_i, $\Delta y_i \ldots \Delta^k y_i$ festsetzen müssen. Ist derselbe

$$\varphi(y_i, \Delta y_i, \cdots \Delta^k y_i) = \varphi_i,$$

dann ist die Wahrscheinlichkeit für y_i gemäß dem Zusammentreffen oder der gleichmäßigen Benützung der alten und neuen Erfahrung

$$w_i = y_i^{t_i}(1 - y_i)^{l_i - t_i}\varphi_i dy_i : \int_0^1 y_i^{t_i}(1 - y_i)^{l_i - t_i} dy_i.$$

Wird wieder die gemeinsame Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen der alten und neuen Erfahrung in allen Beobachtungspunkten gesucht und variiert, so erhält man als zweite Form der Ausgleichsgleichung:

$$\sum_1^n [p_i(w_i - y_i)\,\delta y_i + \delta \log \varphi_i] = 0. \qquad \text{(II)}$$

Es ist selbstverständlich möglich, auch diese Form noch zu verallgemeinern.

Würde beispielsweise mehr als eine Erfahrungsreihe der neuerlichen Beobachtungsreihe vorausgehen und jeder derselben eine andere Beziehung unter den Nachbarwerten entsprechen und wären beispielsweise die wahrscheinlichsten Werte von y_i, Δy_i, ..., $\Delta^k y_i$ in der ersten Erfahrungsreihe μ_i', $\Delta\mu_i'$, ..., $\Delta^k\mu_i'$, in der zweiten Erfahrungsreihe μ_i'', $\Delta\mu_i''$, ..., $\Delta^k\mu_i''$ usw., so würde die Ausgleichsgleichung die Form

$$\sum_1^n [p_i(w_i - y_i)\,\delta y_i + \delta \log \varphi_i' + \delta \log \varphi_i'' + \delta \log \varphi_i''' + \cdots] = 0 \qquad \text{(III)}$$

annehmen, wobei φ_i', φ_i'', φ_i''', ... die Wahrscheinlichkeiten für gewisse Werte der Δy, $\Delta^2 y$, ... bedeuten, die sich aus vorausgegangenen Beobachtungsreihen entwickeln.

Endlich kann man noch die I. und II. oder die I. und III. Ausgleichsgleichung mit einander verbinden, indem man festsetzt, daß die Form der Funktion bestimmt ist und überdies Beziehungen zwischen den jeweiligen Werten der Abweichungen der Konstanten von ihren wahrscheinlichsten Werten existieren. Sind die Konstanten von y: $a, b, c, \ldots$, und die wahrscheinlichsten Werte $a_0, b_0, c_0, \ldots$ dann ist leicht zu sehen, daß die Ausgleichsgleichung die Form annimmt:

$$\sum_1^n [p_i(w_i - y_i)\,\delta y_i + \delta \log \chi(a - a_0, b - b_0, c - c_0 \ldots)] = 0, \qquad \text{(IV)}$$

worin die Funktion χ die Wahrscheinlichkeit jedes Systems der Abweichungen der Konstanten von den wahrscheinlichsten Werten bedeutet.

Mit der Aufstellung der obigen Ausgleichsgleichung sind weder die Formen erschöpft, welche man bisher der Erwartung gegeben hat, noch auch alle Methoden darstellbar, welche in der Literatur behandelt werden.

In ersterer Beziehung ist zu bemerken, daß von dem Problem der Ausgleichung vielfach die Herstellung einer gewissen Kontinuität der Ergebnisse gefordert und als solche deren stete Zu- oder Abnahme bei wachsender unabhängig Veränderlichen verstanden wird. Beispielsweise hält Wittstein den Bedingungen der Ausgleichung genüge getan, wenn die Rohbeobachtungen — die wahrscheinlichsten Werte der Wahrscheinlichkeiten — unverändert belassen und nur nach der Größe geordnet sind. Dies würde in der oben reproduzierten Strecke der Absterbeordnung nach den englischen Erfahrungen lediglich die Umstellung der Sterbenswahrscheinlichkeiten für die Alter 44 und 45 erfordern.

Für die eindeutige Lösung des Ausgleichsproblems ist damit jedoch nichts gewonnen. Wenn nämlich keine andere Bedingung die wahrscheinlichsten Werte verknüpfen soll, dann unterliegen derartige Ergebnisse der Ausgleichsgleichung II; diese muß aber, weil die Bedingung einer nicht näher definierten Kontinuität die $\delta\varphi$ vollständig unbestimmt läßt, Glied für Glied erfüllt sein, woraus für $y_i = w_i$ folgt.

Die hohe Entwickelung der graphischen Ausgleichsmethode, bei welcher die geometrisch verdeutlichten wahrscheinlichsten Werte durch einen *kontinuierlichen* Kurvenzug verbunden werden, spricht nicht gegen diese Behauptung. Die Methode erhält nur dann einen Inhalt, wenn der Ausgleicher einen solchen durch seine Erfahrungen auf diesem Gebiete in die Operationen zu legen vermag.

Anlangend aber die bisherige Darstellung der gebräuchlichen Methoden der Ausgleichung ist zu beachten, daß die übergroße Mehrzahl der Ausgleichsformeln nicht aus den oben abgeleiteten Ausgleichsgleichungen, sondern aus anderweitigen Prinzipien entwickelt wird.

Weil jedoch in der Ausgleichstheorie ohne vorherige Feststellung eines grundlegenden Prinzips Willkür walten muß und sich vor allem kein Maßstab für die Berechtigung einer bestimmten Ausgleichsform ergeben kann, so werden an dieser Stelle zunächst nicht die Motive des Urhebers jeder Ausgleichsform berücksichtigt, sondern wird umgekehrt der Versuch unternommen, die gebräuchlichen Methoden an den oben entwickelten Ausgleichsgleichungen zu rechtfertigen.

§ 50. Die Einteilung der Ausgleichsmethoden. Nachdem die III. Ausgleichsgleichung als eine Kombination der I. und II. und die IV. Ausgleichsgleichung als spezieller Fall der II. Ausgleichsgleichung anzusehen ist, so gelangt man prinzipiell nur zu zwei verschiedenen Gattungen von Ausgleichsmethoden. Jede derselben ist aber noch einer weiteren Unterteilung fähig.

Man kann nämlich die Ausgleichsgleichung erfüllt denken, indem man entweder dieselbe im ganzen zu Null macht oder die über alle Beobachtungswerte zu erstreckende Summe auf der linken Seite der Gleichung in Teilsummen zerlegt und jede für sich erfüllt denkt.

Beispielsweise kann die Ausgleichsgleichung I erfüllt werden, indem man

$$\sum_{1}^{r} p_i (w_i - y_i)\, \delta y_i = \sum_{r+1}^{2r} p_i (w_i - y_i)\, \delta y_i = \cdots$$
$$= \sum_{(k-1)r+1}^{kr} p_i (w_i - y_i)\, \delta y_i = 0$$

setzt und jeder Teilsumme für sich zu genügen trachtet. Auf diese Art gelangt man demnach zu vier Fällen der Ausgleichung und zwar:

1. Es sind alle beobachteten Werte einem bestimmten Gesetze unterworfen und es ist dieses selbst bis auf wenige Konstante, über welche keinerlei Voraussetzung besteht, bekannt.

2. Es ist aus der Erfahrung für alle Werte der Erscheinung eine Erwartung abgeleitet worden, welche sich durch eine Wahrscheinlichkeitsfunktion für eine oder mehrere bestimmte Beziehungen zwischen Nachbarwerten ausdrückt; in der Ausgleichsgleichung soll die Erwartung und die neue Beobachtung gleichmäßig berücksichtigt werden.

3. Ein aus der Erfahrung abgeleitetes Gesetz ist für dieselbe Konstantengruppe immer nur innerhalb eines bestimmten (einheitlichen) Bereiches brauchbar; die Konstanten ändern sich von Bereich zu Bereich.

4. Es ist aus der Erfahrung für alle Wertgruppen von je r Werten je eine bestimmte Beziehung zwischen Nachbarwerten bestimmter Wahrscheinlichkeit gegeben; man hat die Ausgleichung für den Fall zu suchen, daß die speziellen Bedingungen in jeder Wertegruppe nach den Erhebungen für diese besonders geregelt werden.

Alle diese Aufgaben können entweder *allgemein* oder unter gewissen *Einschränkungen* für die Willkürlichkeit der Variationen gelöst

werden. Solche Einschränkungen ergeben sich entweder mit Rücksicht auf die Wesenheit der Erscheinungen oder sind der Vereinfachung der Rechnungen dienlich. Zu den ersteren zählt beispielsweise die Forderung, daß die Summe der beobachteten und aus den ausgeglichenen Werten berechneten Toten einer Absterbeordnung im ganzen oder für bestimmte Bereiche gleich sein müsse; zu den letzteren, daß einzelne unter den Konstanten von der Variation auszunehmen seien oder daß durch die Konstanten die Ausgleichsgleichung in mehrere Teilgleichungen zerfällt wird usf.

Die Ausgleichsaufgaben sollen nach dem eben gegebenen Schema behandelt werden; doch kann man selbstverständlich noch andere Einteilungsgründe für die Ausgleichsmethoden festsetzen.

Die letzteren können verschiedenen Zwecken dienen. Einige Ausgleicher streben durch das Ausgleichsverfahren der wahren Erscheinung (d. i. der Erscheinung, aus welcher die Beobachtungsfehler eliminiert sind) näher zu kommen, als dies in der Reihe der wahrscheinlichsten Werte der Fall ist; andere suchen diese für gewisse praktische Zwecke durch Abänderung tauglicher zu machen. Das Letztere wird in der Regel durch Elimination aller Diskontinuitäten (der Unterbrechungen des charakteristischen Werteverlaufs) in der beobachteten Funktion erzielt. Es sollen die ersteren Verfahrungsarten den Namen der *Tafelausgleichung*, die letzteren den der *Tafelebnung oder der mechanischen Ausgleichung* führen.

§ 51. Der erste Fall der Ausgleichung. Der erste Fall der Ausgleichung wird durch die komplette Gleichung I, also durch diese Gleichung ohne Teilung gewonnen.

Ist das der Erscheinung zugrunde liegende Gesetz in der Form $y = f(a_1, a_2, \ldots, a_\nu, x)$ gegeben, worin $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ völlig unbestimmt gelassene, willkürliche Konstante bedeuten, dann folgt für

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial a_1}\delta a_1 + \frac{\partial y}{\partial a_2}\delta a_2 + \cdots + \frac{\partial y}{\partial a_\nu}\delta a_\nu.$$

Die Definitionsgleichung zerfällt aber wegen der vollständigen Willkürlichkeit der Variationen der Konstanten in ν Gleichungen der Form

$$\sum_1^n \frac{l_i}{y_i(1-y_i)}(w_i - y_i)\frac{\partial y_i}{\partial a_\varrho} = 0. \qquad (V)$$

Das Gleichungssystem ist zur Bestimmung der Konstanten notwendig und hinreichend.

Seiner Lösung bieten sich außerordentliche Schwierigkeiten, wenn

die Funktion f, wie allenthalben in der Statistik, *nicht* eine ganze, lineare Funktion der Konstanten ist. Es läßt sich jedoch auch in diesem Falle stets ein Weg angeben, auf welchem man die letzteren durch lineare Gleichungen bestimmt. Werden nämlich für sie zunächst Näherungswerte ermittelt, wird die Funktion nach Potenzen der sehr kleinen und unbekannten Ergänzungen der Näherungswerte auf die besten Werte entwickelt und die Entwickelung mit den Gliedern erster Ordnung der Kleinheit abgebrochen, dann kann man das ursprüngliche Gleichungssystem durch das der Ergänzungen ersetzen. Dieses ist aber linear.

Im folgenden soll das damit skizzierte allgemeine Ausgleichsverfahren an dem Beispiele der Ausgleichung der Absterbeordnungen nach der Gompertz-Makehamschen Formel entwickelt werden. Diese letztere wird von den meisten Fachmännern nach demselben Schema und zwar in derart vorgenommen, daß man die Näherungswerte der darin enthaltenen Konstanten nach dem Verfahren von King (§ 53: c) ermittelt und die Ausgleichung nicht unmittelbar an den beobachteten Werten, sondern an einer Funktion derselben vollzieht.

Zur Erörterung der Rechnung werde angenommen, daß sich die Zahl der Lebenden L_x durch $ks^x g^{q^x}$, die Lebenswahrscheinlichkeit $1 - w_x$ durch $sg^{q^x(q-1)}$, und der Logarithmus der Lebenswahrscheinlichkeit $\log(1 - w_x)$ durch

$$\log s + q^x (q - 1) \log g = A + Bq^x$$

ausdrücken lasse, ferner, daß die Kingsche Methode für die Näherungswerte von k, s, g, q, A, B die Größen k_0, s_0, g_0, q_0, A_0, B_0 ergeben habe.

Die weiteren Rechnungsoperationen werden nicht an den Lebenden oder an den Sterbenswahrscheinlichkeiten, sondern an dem Logarithmus einer der beiden Größen vollzogen. Dies führt nur insofern zu Weiterungen, als die Gewichte sich entsprechend ändern. Die Größe derselben ergibt sich aus dem Wittsteinschen Satz. Derselbe lautet:

Wenn p_x das Gewicht zur Bestimmung des Wertes w_x ist, so ist das Gewicht für $f(w_x)$ durch den Ausdruck $p_x : \left(\frac{df(w_x)}{dx}\right)^2$ gegeben.

Aus der Ausgleichsgleichung folgt nämlich unmittelbar die Richtigkeit der Gleichung

$$[p_x(y_x - w_x)^2] = \text{Minimum.} \qquad \text{(VI)}$$

Für das unbekannte Gewicht P_x von $f(w_x)$ muß die Beziehung

$$[P_x(f(y_x) - f(w_x))^2] = \text{Minimum}$$

bestehen; wird nun $f(y) = f(w + y - w)$ nach der Taylorschen Reihe entwickelt und werden hierbei alle höheren Potenzen vernachlässigt, weil w immer sehr nahe an y gelegen ist, so erhält man

$$f(y) - f(w) = (y - w)\frac{df}{dw}$$

und als Minimumbedingung

$$\left[P_x\left(\frac{df}{dw_x}\right)^2 (y_x - w_x)^2\right] = \text{Minimum}.$$

Die Koexistenz mit der Gleichung VI erfordert, daß

$$p_x = P_x\left(\frac{df}{dw_x}\right)^2.$$

Speziell ist das Gewicht der Funktion

$\log(1 - w_x)$ der Ausdruck $\frac{l_x}{w_x(1 - w_x)}(1 - w_x)^2 = \frac{l_x(1 - w_x)}{w_x} = \Gamma_x$.

Die Ausgleichsgleichung zur Gompertz-Makehamschen Formel lautet sodann

$$[\Gamma_x(\log(1 - w_x) - A - Bq^x)^2] = \text{Minimum},$$

und wenn man $A = A_0 + \alpha$, $B = B_0 + \beta$, $q = q_0 + \gamma$ gleichsetzt,

$$[\Gamma_x(\log 1 - w_x - A_0 - B_0 \cdot q_0^x - \alpha - \beta q_0^x - \gamma B_0 x q_0^{x-1})^2] = \text{Minimum}. \quad \text{(VII)}$$

Führt man zur Abkürzung für $\log 1 - w_x - A_0 - B_0 \cdot q_0^x = u_x$ und für $\frac{\gamma B_0}{q_0}$ die neue Unbekannte δ ein, differenziert die Gleichung je nach α, β, δ und setzt das Resultat jeweils Null, dann erhält man die 3 Bedingungsgleichungen für den Eintritt des Minimums (die Normalgleichungen):

$$\begin{aligned}
&\alpha[\Gamma_x] + \beta[\Gamma_x q_0^x] + \delta[\Gamma_x x q_0^x] = [\Gamma_x u_x] \\
&\alpha[\Gamma_x q_0^x] + \beta[\Gamma_x q_0^{2x}] + \delta[\Gamma_x x q_0^{2x}] = [\Gamma_x q_0^x u_x] \qquad \text{(VIII)} \\
&\alpha[\Gamma_x x q_0^x] + \beta[\Gamma_x x q_0^{2x}] + \delta[\Gamma_x x^2 q_0^{2x}] = [\Gamma_x x q_0^x u_x].
\end{aligned}$$

Der Effekt der Methode soll noch ziffernmäßig (an der Tafel der 20 englischen Gesellschaften) illustriert werden. In der nachfolgenden Tabelle sind zum Vergleiche die Rohzahlen, die Ausgleichswerte nach King und die definitiven Werte rücksichtlich eines Teiles der zwischen den Altern 17 und 83 behandelten Absterbeordnung zusammengestellt:

Alter	Lebende	Tote	unausgeglichen	ausgeglichen nach King	definitive Ausgleichung
35	35818,5	295	0,00824	0,00862	0,00869
36	36840,5	326	0,00885	0,00885	0,00891
37	37360	357	0,00956	0,00910	0,00916
38	37804,5	389	0,01029	0,00937	0,00942
39	38112,5	405	0,01063	0,00969	0,00972
40	38195	377	0,00987	0,01001	0,01003

Alter	Lebende	Tote	unausgeglichen	ausgeglichen nach King	definitive Ausgleichung
41	37838	396	0,01047	0,01038	0,01039
42	37258,5	399	0,01071	0,01081	0,01077
43	36534,5	387	0,01059	0,01122	0,01120
44	35693	421	0,01180	0,01172	0,01166
45	34735,5	429	0,01235	0,01224	0,01217
46	33660,5	421	0,01251	0,01281	0,01273
47	32502	460	0,01415	0,01345	0,01334
48	31228	440	0,01409	0,01415	0,01401
49	30055,5	459	0,01527	0,01490	0,01475
50	28855,5	476	0,01650	0,01572	0,01555
51	27510,5	479	0,01741	0,01665	0,01644
52	26208,5	446	0,01702	0,01764	0,01741

Den ausgeglichenen Werten liegen die Näherungen

$$\log q_0 = 0{,}03965686 \qquad q_0 = 1{,}0956122$$
$$\log g_0 = 0{,}9995432 - 1$$
$$\log s_0 = 0{,}997310673 \qquad A_0 = 0{,}997310673$$
$$\log k_0 = 4{,}0404723 \qquad B_0 = 0{,}9999563244 - 1.$$

und die Ergänzungen

$$\alpha = -0{,}000108618$$
$$\beta = 0{,}00000529261$$
$$\gamma = 0{,}00182731,$$

zugrunde.

Die eben entwickelte Methode bietet technisch in zweifacher Beziehung besondere Schwierigkeiten. Die Formeln VIII haben auf der rechten Seite durchwegs Summen von abwechselnd positiven und negativen Gliedern; die Unterscheidung der Zeichen ist Quelle mannigfachen Irrtums. Erwägt man jedoch, daß

$$[\Gamma_x u_x] = [\Gamma_x \log (1 - w_x)] - A_0 [\Gamma_x] - B_0 [\Gamma_x q_0{}^x]$$
$$[\Gamma_x q_0{}^x u_x] = [\Gamma_x q_0{}^x \log (1 - w_x)] - A_0 [\Gamma_x q_0{}^x] - B_0 [\Gamma_x q_0{}^{2x}]$$
$$[\Gamma_x q_0{}^x u_x x] = [\Gamma_x q_0{}^x x \log (1 - w_x)] - A_0 [\Gamma_x q_0{}^x x] - B_0 [\Gamma_x q_0{}^{2x} x],$$

ferner, daß die Summen auf der rechten Seite dieses Systems nur aus gleichbezeichneten Gliedern bestehen, endlich, daß $[\Gamma_x]$, $[\Gamma_x q_0{}^x]$, $[\Gamma_x q_0{}^{2x}]$, $[\Gamma_x q_0{}^x x]$ und $[\Gamma_x q_0{}^{2x} x]$ bereits auf der linken Seite des Gleichungssystems VIII entwickelt sind, dann erscheinen alle drei Werte auf der linken Seite des letzten Systems auf drei neue, aus lauter gleichbezeichneten Einzelgliedern zusammengesetzte Summen, nämlich $[\Gamma_x \log (1 - w_x)]$, $[\Gamma_x q_0{}^x \log (1 - w_x)]$, $[\Gamma_x q_0{}^x x \log (1 - w_x)]$ zurückgeführt.

Im allgemeinen wird die Auflösung der Normalgleichungen nicht sofort zum Ziele führen, weil die Voraussetzung, daß die Ergänzungen α, β, γ sehr kleine Größen sind, vielfach nicht statthat, sondern es wird

das Verfahren ein oder mehrere Male wiederholt werden müssen. Um von vornherein mit starken Näherungen in die Rechnung einzutreten, empfiehlt es sich zunächst, nur den Wert von q_0 nach dem Verfahren von King zu ermitteln, darnach die beiden Werte A und B nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate unmittelbar zu entwickeln (§ 53: a) und mit diesem solcher Art erhaltenen Systeme von Näherungswerten die Rechnung durchzuführen. (Roßmanith, die verschiedenen Methoden der Anwendung der Gompertz-Makehamschen Formel, Wien 1906.)

Eine Methode endlich, unter der Annahme zu ausgeglichenen Werten zu gelangen, daß sich die „Ausgleichsfunktion“ in eine Taylorsche Reihe mit stark abfallenden Gliedern entwickeln läßt, hat Pearson beschrieben.

§ 52. Ausgleichung Pearsons durch die Kurvenmomente. Wenn in der Ausgleichsgleichung I von den Gewichten abgesehen und von der Summe zum Integral übergegangen wird, dann besteht die Gleichung

$$\int (y - w)^2 \, dx = \text{Minimum}.$$

Als Minimumbedingung ergibt sich sodann

$$\int (y - w) \delta y \, dx = 0.$$

Wird nun angenommen, daß dem Ausgleichsgesetz eine Funktion von n Parametern zugrunde liegt, so wird man schreiben können

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \cdots + \alpha_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R,$$

wobei der Rest selbst wieder als eine Funktion der n Konstanten $\alpha_0, \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1}$ anzusehen ist.

Führt man in die obige Summe

$$\delta y = \delta \alpha_0 + x \delta \alpha_1 + \frac{x^2}{1 \cdot 2} \delta \alpha_2 + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \delta \alpha_{n-1} + \frac{\partial R}{\partial \alpha_0} \delta \alpha_0 + \cdots + \frac{\partial R}{\partial \alpha_{n-1}} \delta \alpha_{n-1}$$

ein, so erhält man ein System von Gleichungen der folgenden Art

$$\int y \, dx = \int w \, dx - \int (y - w) \frac{\partial R}{\partial \alpha_0} \, dx,$$

$$\int y x \, dx = \int w x \, dx - \int (y - w) \frac{\partial R}{\partial \alpha_1} \, dx.$$

$$\vdots$$

$$\int y x^{n-1} dx = \int w x^{n-1} dx - (n-1)! \int (y - w) \frac{\partial R}{\partial \alpha_{n-1}} \, dx.$$

Die Integrale auf der linken Seite der Gleichung werden als Kurvenmomente der *theoretischen*, die ersten Integrale auf der rechten Seite der Gleichung als Kurvenmomente der *beobachteten* Kurve bezeichnet. Die Ausdrücke $\int (y - w) \frac{\partial R}{\partial \alpha_i} dx$ müssen stets klein bleiben. Einerseits enthält jedes Integral die nach der Voraussetzung sehr kleine Größe $(y - w)$, andererseits muß auch der Faktor $\frac{\partial R}{\partial \alpha_i}$ als das differenzierte Restglied sehr klein sein. Bei Vernachlässigung der zweiten Glieder auf der rechten Seite der Gleichung gewinnt man die Beziehungsgleichungen zwischen den theoretischen und beobachteten Kurvenmomenten.

Man kann nun diese Gleichungen unmittelbar zur Berechnung der unbekannten Kurvenparameter verwerten, indem man ebenso viele Momentgleichungen benützt, als es Parameter gibt.

Die Berechnung der Kurvenmomente begegnet insofern einer Schwierigkeit, als sich aus den beobachteten Werten unmittelbar nur die $\Sigma y x^n$, nicht aber die Integrale darstellen lassen. Die Ausführung der Rechnung erfordert somit eine Relation zwischen Integral und Summe. Solche sind in der Literatur vielfach bekannt (die Formeln von Simpson, Weddle usf.). Pearson hat die nachstehende Beziehung zwischen dem n^{ten} Kurvenmomente und der n^{ten} und den vorausgehenden Summen entwickelt.

Zerlegt man die Kurve in so viele Abschnitte gleich großer Abszissenstücke, daß die Abschnitte fast geradlinig verlaufen, dann unterliegen die Kurvenmomente *eines* Abschnittes der folgenden Beziehung:

$$M_n = \int_{x_1}^{x_2} y x^n dx = \frac{1}{x_2 - x_1} \cdot \int_0^1 [y_1 + \vartheta (y_2 - y_1)] [x_1 + \vartheta (x_2 - x_1)]^n d\vartheta$$

$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \frac{x_x^{n+2} - x_1^{n+2}}{n+2} + \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1} \frac{x_2^{n+1} - x_1^{n+1}}{n+1}.$$

Sondert man die rechte Seite der Gleichung nach y_2 und y_1 und führt die Relation $x_2 = c + x_1$ ein, dann findet man

$$M_n = y_2 \left(\frac{x_2^n c}{2!} - \frac{n}{3!} x_2^{n-1} c^2 + \frac{n(n-1)}{4!} x_2^{n-2} c^3 - \cdots \right)$$

$$- y_1 \left(\frac{x_1^n c}{2!} + \frac{n}{3!} x_1^{n-1} c^2 + \frac{n(n-1)}{4!} x_1^{n-2} c^3 + \cdots \right)$$

und endlich durch Summierung über alle Kurvenabschnitte

$$\int y x^n dx = 2 \sum_{r=0,1\cdots} y_r \left(\frac{x_r^n c}{2!} + \frac{n(n-1) x_r^{n-2} c^3}{4!} + \right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{6!} x_r^{n-4} c^5 + \cdots \right). \qquad \text{(IX)}$$

Speziell lauten die vier ersten Kurvenmomente M_0', M_1', M_2', M_3', M_4', wenn $\Sigma y_r r^s = N'_s$ genannt und für $x = rc$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned} M_0' &= cN_0', \\ M_1' &= c^2 N_1', \\ M_2' &= c^3\left(N_2' + \frac{1}{6} N_0'\right) \\ M_3' &= c^4\left(N_3' + \frac{1}{2} N_1'\right), \\ M_4' &= c^5\left(N_4' + N_2' + \frac{1}{15} N_0'\right), \end{aligned} \tag{IX$_1$}$$

oder wenn man durch die erste Gleichung hindurchdividiert und die Quotienten $\frac{M_s'}{M_0'}$ mit μ_s', $\frac{N_s'}{N_0'}$ mit ν_s' bezeichnet:

$$\begin{aligned} \mu_1' &= c\nu_1', \\ \mu_2' &= c^2\left(\nu_2' + \frac{1}{6}\right), \\ \mu_3' &= c^3\left(\nu_3' + \frac{1}{2}\nu_1'\right), \\ \mu_4' &= c^4\left(\nu_4' + \nu_2' + \frac{1}{15}\right). \end{aligned} \tag{IX$_2$}$$

Auch diese Gleichung kann man noch allgemein transformieren, indem man die Kurvenmomente „μ“ von der Abszisse $N_1' : N_0'$ aus bildet und diese letztere in den Koordinatenanfangspunkt verlegt.

Verwendet man zu diesem Zwecke die leicht verständliche Gleichung:

$$\mu_n = \mu_n' - \binom{n}{1}\mu_{n-1}'\mu_1' + \binom{n}{2}\mu_{n-2}'\mu_1'^2 - \binom{n}{3}\mu_{n-3}'\mu_1'^3 + \cdots$$

so findet man schließlich das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 0, \\ \mu_2 &= c^2\left(\nu_2' - \nu_1'^2 + \frac{1}{6}\right), \\ \mu_3 &= c^3(\nu_3' - 3\nu_2'\nu_1' + 2\nu_1'^3), \\ \mu_4 &= c^4\left(\nu_4' - 4\nu_3'\nu_1' + 6\nu_2'\nu_1'^2 - 4\nu_1'^4 + \nu_2' - \nu_1'^2 + \frac{1}{15}\right). \end{aligned} \tag{IX$_3$}$$

1. Beispiel. Für die Binomialreihe ergibt sich ohne jede Schwierigkeit:

$$\begin{aligned} &\Sigma w_x = 1, \\ &\Sigma(x - np)w_x = 0, \\ &\Sigma(x - np)^2 w_x = npqc^2, \\ &\Sigma(x - np)^3 w_x = -npqc^3(q - p), \\ &\Sigma(x - np)^4 w_x = npq[3(n-2)pq + 1]c^4 \end{aligned}$$

und somit

$$\mu_2 = c^2\left(npq + \frac{1}{6}\right),$$
$$\mu_3 = -c^3 npq(q-p),$$
$$\mu_4 = c^4\left(\frac{1}{15} + npq[3(n-2)pq + 2]\right).$$

Setzt man $npq = z$, $\frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = \beta_1$ und $\frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \beta_2$, so erhält man zur Bestimmung für z:

$$z^3(6 + 3\beta_1 - 2\beta_2) + z^2\left(1 + \frac{3}{2}\beta_1 - \frac{2}{3}\beta_2\right)$$
$$+ z\left(\frac{2}{15} + \frac{1}{4}\beta_1 - \frac{1}{18}\beta_2\right) + \frac{\beta_1}{72} = 0$$

und hieraus c, n, p und q.

2. Beispiel. Zur Bestimmung der Konstanten der Funktion (Vergl. Seite 165)

$$y = y_0\left(1 + \frac{x}{\alpha_1}\right)^{\nu\alpha_1}\left(1 - \frac{x}{\alpha_2}\right)^{\nu\alpha_2}$$

führt man zunächst die Zeichen $\alpha_1 + \alpha_2 = b$, $\nu\alpha_1 = m_1$, $\nu\alpha_2 = m_2$ $z = \frac{x + \alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}$, $\eta = y_0 \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)^{m_1 + m_2}}{\alpha_1^{m_1}\alpha_2^{m_2}}$ ein und erhält sodann

$$y = \eta z^{m_1}(1 - z)^{m_2}.$$

Das Kurvenmoment $\alpha\mu_n'$, gezählt von $x = -\alpha_1$ bis $x = \alpha_2$ und bezogen auf $x = -\alpha_1$ als Anfangspunkt $\left(\text{wenn } \mu_0 = \alpha = \eta b \int_0^1 z^{m_1}(1-z)^{m_2} dz\right)$, kommt gleich:

$$\alpha\mu_n' = \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} y(x + \alpha_1)^n dx = \eta b^{n+1} \int_0^1 z^{m_1 + n}(1 - z)^{m_2} dz$$
$$= \eta b^{n+1} \frac{\Gamma(m_1 + n + 1)\Gamma(m_2 + 1)}{\Gamma(m_1 + m_2 + n + 2)}.$$

Hieraus folgt sofort

$$\mu_1' = \frac{b(m_1 + 1)}{m_1 + m_2 + 2},$$
$$\mu_2' = b^2 \frac{(m_1 + 1)(m_1 + 2)}{(m_1 + m_2 + 2)(m_1 + m_2 + 3)},$$
$$\mu_3' = b^3 \frac{(m_1 + 1)(m_1 + 2)(m_1 + 3)}{(m_1 + m_2 + 2)(m_1 + m_2 + 3)(m_1 + m_2 + 4)},$$
$$\mu_4' = b^4 \frac{(m_1 + 1)(m_1 + 2)(m_1 + 3)(m_1 + 4)}{(m_1 + m_2 + 2)(m_1 + m_2 + 3)(m_1 + m_2 + 4)(m_1 + m_2 + 5)}$$

und für die auf das Maximum der Kurve bezogenen Momente $\alpha\mu_n$, wenn man von den Abkürzungen $m_1 + 1 = m_1'$, $m_2 + 1 = m_2'$, $m_1' + m_2' = r$ Gebrauch macht,

$$\mu_1 = 0,$$
$$\mu_2 = \frac{b^2 m_1' m_2'}{r^2(r+1)},$$
$$\mu_3 = \frac{2b^3 m_1' m_2'(m_2' - m_1')}{r^3(r+1)(r+2)},$$
$$\mu_4 = \frac{3b^4 m_1' m_2'[m_1' m_2'(r-6) + 2r^2]}{r^4(r+1)(r+2)(r+3)}.$$

Bezeichnet man endlich unter $\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$, $\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}$, $\varepsilon = m_1' m_2'$, dann gewinnt man zunächst

$$\beta_1 = \frac{4(r^2 - 4\varepsilon)(r+1)}{\varepsilon(r+2)^2},$$
$$\beta_2 = \frac{3(r+1)[2r^2 + \varepsilon(r-6)]}{\varepsilon(r+2)(r+3)}$$

sodann sukzessive

$$r = \frac{6(\beta_2 - \beta_1 - 1)}{3\beta_1 - 2\beta_2 + 6},$$
$$\varepsilon = \frac{r^2}{4 + \frac{1}{4}\beta_1 \frac{(r+2)^2}{r+1}},$$
$$b = \frac{1}{2}\sqrt{\mu_2[\beta_1(r+2)^2 + 16(r+1)]},$$

und endlich hieraus ν, α_1, α_2.

3. Beispiel. Zur Bestimmung der Konstanten der Gompertz-Makehamschen Sterbeformel $l_x = k s^x g^{q^x}$ kann man zunächst den Koordinatenanfangspunkt in den Mittelwert des auszugleichenden Stückes verlegen, sowie den konstanten Faktor σ (eine ganze Anzahl von Jahren, durch welche man die Absterbeordnung beiderseits vom Mittelwerte x_0 verfolgt) einführen und gewinnt hierdurch:

$$l_x = k' s'^{\frac{x'}{\sigma}} g'^{q'^{\frac{x'}{\sigma}}},$$

wenn $s' = s^\sigma$, $g' = g^{q^{x_0}}$, $q^\sigma = q'$ und $k' = k s^{x_0}$ bedeuten.

Durch beiderseitiges Logarithmieren der Gleichung erhält man sodann

$$\log l_x = \log k' + \frac{x'}{\sigma}\log s' + q'^{\frac{x'}{\sigma}} \log g'$$

oder unter Benützung leicht deutbarer Zeichen

$$L_x = K + \frac{x'}{\sigma} S + e^{\frac{2nx'}{\sigma}} G.$$

Hieraus ergeben sich für $\sigma = l$ und $x' = x$ nun unmittelbar die folgenden Momentgleichungen

$$A = \mu_0 = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} L_x dx = Kl + \frac{Gl}{2n}(e^n - e^{-n})$$

oder

$$\frac{A}{l} = K + G\,\frac{e^n - e^{-n}}{2n},$$

$$A\mu_1 = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x L_x dx = \frac{Sl^2}{12} + \frac{Gl^2}{4n}\left[(e^n + e^{-n}) - \frac{e^n - e^{-n}}{n}\right],$$

$$A\mu_2 = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 L_x dx = \frac{Kl^3}{12} + \frac{Gl^3}{8n}\left[(e^n - e^{-n}) - \frac{2(e^n + e^{-n})}{n} + \frac{2(e^n - e^{-n})}{n^2}\right],$$

$$A\mu_3 = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^3 L_x dx = \frac{Sl^4}{80} + \frac{Gl^4}{16n}\left[(e^n + e^{-n}) - \frac{3}{n}(e^n - e^{-n}) + \right.$$

$$\left. + \frac{6}{n^2}(e^n + e^{-n}) - \frac{6}{n^3}(e^n - e^{-n})\right],$$

welche sodann zur Bestimmung der K, S, G und n ausreichen.

Wenn man etwa aus den 4 Gleichungen die Größen S, G, K eliminiert, dann erhält man eine transzendente Gleichung in n, welche in verschiedener Art — eventuell durch die Newtonsche Näherungsmethode — aufgelöst werden kann.

Mit welchem Erfolge diese Methode verwendet wird, zeigt das nachfolgende, an den vorläufigen Ergebnissen der Absterbeordnung für österreichische Versicherte durchgeführte Rechnungsbeispiel:

Altersgruppe	Anzahl der Todesfälle beobachtet	berechnet	Differenz	Differenz berechnet bei Anwendung der kleinsten Quadrate
28—34	2277	2430	— 153	— 34
35—39	3300	3370	— 70	6
40—44	4629	4597	32	60
44—49	5659	5633	26	— 6
50—54	6518	6370	148	78
55—59	7008	6809	199	120
60—64	6645	6855	— 210	— 273
65—69	6366	6342	24	6
70—74	4890	4949	— 59	— 37
65—79	3058	3073	— 15	23
80—84	1322	1291	31	68
85—89	241	256	— 15	11
Summe	51913	51975	— 62	0

(Roßmanith, die verschiedenen Methoden der Anwendung der Gompertz-Makehamschen Formel.)

§ 53. Der erste Fall der Ausgleichung unter Einschränkung der Willkürlichkeit der Konstanten. a) Der Fall, daß einzelne Konstante von der Variation vollständig ausgeschlossen werden, bedarf der besonderen Erörterung nicht. Die Ausgleichsaufgabe reduziert sich sodann auf das allgemeine Problem der Variation der übrigen Konstanten. Wenn beispielsweise in der Gompertz-Makehamschen Formel q unverändert bleibt, bezw. als aus irgend einer anderen Untersuchung bekannt vorausgesetzt werden darf, dann kann das System der Normalgleichungen ohne jede vorbereitende Berechnung der Näherungswerte aus der Formel $\log(1 - w_x) = A + Bq^x$ entwickelt werden. Dasselbe lautet

$$[\Gamma_x \log(1 - w_x)] = A\,[\Gamma_x] + B\,[q^x \Gamma_x]$$
$$[\Gamma_x \log(1 - w_x)\, q^x] = A\,[\Gamma_x q^x] + B\,[q^{2x} \Gamma_x]$$

und führt sofort zu den besten Werten von A und B. *Wegen des großen Rechnungsersparnisses gegenüber der Auflösung der Normalgleichungen für alle drei Konstanten hat man die Bestimmungsweise zu einem Verfahren für A, B und q ausgebildet, indem man zu einem System nahegelegener q die zugehörigen A und B berechnet und empirisch bestimmt, zu welchem Wertesystem aller drei Konstanten die kleinste Quadratsumme der Fehler gehört.*

b) Der Forderung, daß bei korrekt ausgeglichener Absterbeordnung die Summe der berechneten und beobachteten Toten immer für je μ benachbarte Beobachtungspunkte

$$\mu \leqq n$$

gleich sein müsse, wird entsprochen, wenn neben der Gleichung

$$\sum_1^n p_i (y_i - w_i) \sum_1^\nu{}_\varrho \frac{\partial y_i}{\partial a_\varrho}\, \delta a_\varrho = 0$$

noch das System von $\frac{n}{\mu} = \sigma$ Gleichungen $\sum_{(\tau-1)\mu}^{\tau\mu} l_i (y_i - w_i) = 0$ erfüllt ist.

Zur Lösung des Problems kann man jede der Gleichungen des Systems der σ Gleichungen gleichfalls variieren und aus den σ neuen Gleichungen

$$\sum_{(\tau-1)\mu}^{\tau\mu} l_i \sum_1^\nu{}_\varrho \frac{\partial y_i}{\partial a_\varrho}\, \delta a_\varrho = 0$$

und der Grundgleichung irgend σ Variationen eliminieren. Setzt man sodann die Faktoren zu den $\nu - \sigma$ restierenden Variationen wegen deren vollständiger Willkürlichkeit Null, so erhält man $\nu - \sigma$ neue Gleichungen, welche zusammen mit den σ Gleichungen des Systems zur Bestimmung aller ν Konstanten der Funktion ausreichen.

In übersichtlicherer Art wird das Problem allerdings gelöst, wenn man die Gleichungen des Systems der Reihe nach mit den vollständig willkürlichen Konstanten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_\sigma$ multipliziert, das System mit der Grundgleichung addiert und die Faktoren sämtlicher ν Variationen Null setzt. Zusamt dem System von σ Gleichungen erhält man $\nu + \sigma$ Gleichungen, aus welchen sich die Konstanten $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ und $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\sigma$ berechnen lassen.

Man hat allgemein die Identität zwischen der beobachteten und rechnungsmäßigen Anzahl von Toten als ein Kriterium einer guten Ausgleichsmethode hingestellt. Nach den obigen Erörterungen ergibt sich, daß man bei jeder beliebigen Funktion für die Absterbeordnung und entsprechender Beschränkung der Konstanten die erwähnte Bedingung erfüllen kann.

c) King setzt voraus, daß die Summe der Beobachtungswerte in so viele Teilsummen gleich vieler Beobachtungswerte zerlegt werden kann, als die Ausgleichsfunktion Konstante besitzt und daß die Ausgleichsgleichung für jede Teilsumme erfüllt ist. Fallen auf solche Art von den $n = \mu \cdot \nu$ Beobachtungswerten je μ in eine Gruppe, dann lautet das System der Ausgleichsgleichungen:

$$\sum_{1}^{\mu} p_x (y_x - w_x)\, \delta y_x = 0, \qquad \sum_{\mu+1}^{2\mu} p_x (y_x - w_x)\, \delta y_x = 0, \qquad \ldots$$

$$\sum_{(\nu-1)\mu}^{\nu\mu} p_x (y_x - w_x)\, \delta y_x = 0.$$

Hieraus ergibt sich mit Beziehung auf die Grundgleichung

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial a_1}\, \delta a_1 + \frac{\partial y}{\partial a_2}\, \delta a_2 + \cdots + \frac{\partial y}{\partial a_\nu}\, \delta a_\nu$$

und wenn man noch allgemein die Summe

$$\sum_{i(u-1)}^{i u} p_x (y_x - w_x)\, \frac{\partial y_x}{\partial a_k} \quad \text{mit } m_{ik} \text{ bezeichnet,}$$

das System

$$\begin{aligned} m_{11}\delta a_1 + m_{12}\delta a_2 + \cdots + m_{1\nu}\delta a_\nu &= 0 \\ m_{21}\delta a_1 + m_{22}\delta a_2 + \cdots + m_{2\nu}\delta a_\nu &= 0 \\ &\vdots \\ m_{\nu 1}\delta a_1 + m_{\nu 2}\delta a_2 + \cdots + m_{\nu\nu}\delta a_\nu &= 0, \end{aligned}$$

sowie die Beziehung

$$\Delta = \begin{vmatrix} m_{11}, & m_{12} & \ldots & m_{1\nu} \\ m_{21}, & m_{22} & \ldots & m_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{\nu 1}, & m_{\nu 2}, & \ldots & m_{\nu\nu} \end{vmatrix} = 0.$$

Das Verschwinden der Determinanten ist somit die notwendige Bedingung für das gleichzeitige Bestehen des obigen Systems von Variationen.

Dasselbe wird unter den verschiedensten Bedingungen und beispielsweise auch dann stattfinden, wenn irgend eine Horizontal- oder Vertikalzeile oder ein System der ihnen adjungierten Determinanten a_{ik} verschwindet und demnach

$$m_{i1} = m_{i2} = \cdots = m_{iv} = 0 \quad \text{oder} \quad m_{1i} = m_{2i} = \cdots = m_{vi} = 0$$

oder

$$a_{i1} = a_{i2} = \cdots = a_{iv} = 0 \quad \text{oder} \quad a_{1i} = a_{2i} = \cdots = a_{vi} = 0.$$

Nennt man mit Pearson $\sum_{i(\mu-1)}^{i\mu} p_x y_x \frac{\partial y_x}{\partial a_k}$ *das* k^{te} *theoretische,* $\sum_{i(\mu-1)}^{i\mu} p_x w_x \frac{\partial y_x}{\partial a_k}$ *das* k^{te} *empirische Kurvenmoment des* i^{ten} *Systems,* dann ergeben sich die beiden bemerkenswerten Sätze:

1. *Die Ausgleichsgleichung ist erfüllt, wenn entweder alle theoretischen und empirischen Kurvenmomente ein und desselben Systemes gleich sind oder die Differenzen zwischen denselben theoretischen und empirischen Kurvenmomenten in allen Systemen verschwinden.*

2. *Das Kingsche Problem ist nur ein spezieller Fall des allgemeinen Problems, wonach die Konstanten der Ausgleichsgleichung derart die Minimumbedingung zu erfüllen haben, daß die allgemeine Ausgleichsgleichung in* μ *für sich verschwindender Teilstrecken*

$$\mu < \nu$$

zerfällt.

Die Kingsche *Lösung* des Problems setzt voraus, daß allgemein $m_{i1} = 0$ und die Gewichte konstant sind. Die Gompertz-Makehamsche Formel hat beispielsweise 4 Konstante. Teilt man die Gesamtsumme der Beobachtungen n über die Absterbeordnung — die Gesamtstrecke — in vier gleiche Teile zu je p Beobachtungen, dann kann man daraus vier Serien von Gleichungen entwickeln:

$$\begin{aligned}
\log l_{x+i} &= \log k + (x+i)\log s + q^{x+i}\log g \\
\log l_{x+p+i} &= \log k + (x+p+i)\log s + q^{x+p+i}\log g \\
\log l_{x+2p+i} &= \log k + (x+2p+i)\log s + q^{x+2p+i}\log g \\
\log l_{x+3p+i} &= \log k + (x+3p+i)\log s + q^{x+3p+i}\log g,
\end{aligned}$$

Aus denselben ergeben sich die einzelnen Gleichungen der Serien durch Substitution von $i = 0, 1, 2 \ldots p-1$ und man gelangt durch einfache Summierung der Glieder jeder Serie zu den folgenden vier Grundgleichungen:

$$\sum_{0}^{p-1} \log l_{x+i} = p \log k + \frac{p}{2}(2x + p - 1) \log s + q^x \frac{q^p - 1}{q - 1} \cdot \log g$$

$$\sum_{p}^{2p-1} \log l_{x+i} = p \log k + \frac{p}{2}(2x + 3p - 1) \log s + q^{x+p} \frac{q^p - 1}{q - 1} \cdot \log g$$

$$\sum_{2p}^{3p-1} \log l_{x+i} = p \log k + \frac{p}{2}(2x + 5p - 1) \log s + q^{x+2p} \frac{q^p - 1}{q - 1} \cdot \log g$$

$$\sum_{3p}^{4p-1} \log l_{x+i} = p \log k + \frac{p}{2}(2x + 7p - 1) \log s + q^{x+3p} \frac{q^p - 1}{q - 1} \cdot \log g.$$

Durch Subtraktion je zweier folgender Gleichungen findet man sodann

$$\Delta \sum_{0}^{p-1} \log l_{x+i} = p^2 \log s + q^x \frac{(q^p - 1)^2}{q - 1} \cdot \log g,$$

$$\Delta \sum_{p}^{2p-1} \log l_{x+i} = p^2 \log s + q^{x+p} \frac{(q^p - 1)^2}{q - 1} \cdot \log g,$$

$$\Delta \sum_{2p}^{3p-1} \log l_{x+i} = p^2 \log s + q^{x+2p} \frac{(q^p - 1)^2}{q - 1} \cdot \log g,$$

und durch nochmalige Subtraktion

$$\Delta^2 \sum_{0}^{p-1} \log l_{x+i} = \frac{q^x (q^p - 1)^3}{q - 1} \cdot \log g,$$

$$\Delta^2 \sum_{p}^{2p-1} \log l_{x+i} = \frac{q^{x+p} (q^p - 1)^3}{q - 1} \cdot \log g.$$

Die Division der beiden letzten Gleichungen ergibt endlich

$$\log \left(\Delta^2 \sum_{p}^{2p-1} \log l_{x+i}\right) - \log \left(\Delta^2 \sum_{0}^{p-1} \log l_{x+i}\right) = p \log q. \qquad \text{(IX)}$$

Die Auflösung der Gleichung nach q führt dann leicht zu g, s und k.

§ 54. Der zweite Fall der Ausgleichung. (Die allgemeine Lösung.) Zur Behandlung des zweiten Falles der Ausgleichung wird vorausgesetzt, daß die durch die Funktion φ charakterisierte Wahrscheinlichkeit für kleine Abweichungen von dem wahrscheinlichsten System der Differenzen derart rasch abnehme, daß man in der Entwickelung der Funktion $\log \varphi$ nach den Potenzen von $y - \mu$ bei den 2. Potenzen stehen bleiben könne. Dann ist

$$\log\varphi(y, \Delta y, \Delta^2 y, \ldots, \Delta^k y) = \log\varphi(\mu + y - \mu, \Delta\mu + \Delta y - \Delta\mu, \ldots, \Delta^k\mu + \Delta^k y - \Delta^k\mu)$$

$$= \log\varphi(\mu, \Delta\mu, \ldots, \Delta^k\mu) + (y-\mu)\frac{\partial \log\varphi}{\partial y} + \Delta(y-\mu)\frac{\partial \log\varphi}{\partial \Delta y}$$

$$+ \cdots + \Delta^k(y-\mu)\frac{\partial^k \log\varphi}{\partial \Delta^k y} + \frac{1}{2}\Big[(y-\mu)^2\frac{\partial^2 \log\varphi}{\partial y^2}$$

$$+ 2(y-\mu)\Delta(y-\mu)\frac{\partial^2 \log\varphi}{\partial y \partial \Delta y} + 2(y-\mu)\Delta^2(y-\mu)\frac{\partial^2 \log\varphi}{\partial y \partial \Delta^2 y} \cdots\Big],$$

und gemäß der Bedingung, daß φ in allen Werten von y ein Maximum für die Werteverbindung $\mu, \Delta\mu, \ldots, \Delta^k\mu$ besitzen müsse, wenn man noch die Bezeichnungsweise

$$\frac{\partial^2 \log\varphi}{\partial y^2} = a_{00}, \qquad \frac{\partial^2 \log\varphi}{\partial y \partial \Delta y} = a_{01}, \qquad \cdots \qquad \frac{\partial^2 \log\varphi}{\partial y \partial \Delta^k y} = a_{0k},$$

$$\frac{\partial^2 \log\varphi}{\partial \Delta y \partial \Delta y} = a_{11}, \qquad \cdots \qquad \frac{\partial^2 \log\varphi}{\partial \Delta y \partial \Delta^k y} = a_{1k},$$

$C = \log\varphi(\mu, \Delta\mu, \ldots, \Delta^k\mu)$ einführt,

$$\log\varphi(y, \Delta y, \Delta^2 y, \ldots, \Delta^k y) = C - [a_{00}(y-\mu)^2 + 2a_{01}(y-\mu)\Delta(y-\mu)$$
$$+ \cdots + 2a_{0k}(y-\mu)\Delta^k(y-\mu) + a_{11}(\Delta y - \Delta\mu)^2 + \cdots].$$

Aus der Bedingung des Maximums folgt, daß man die rechte Seite der Gleichung in

$$-\frac{k_1^2}{2}f_1^2 - \frac{k_2^2}{2}f_2^2 \cdots - \frac{k_k^2}{2}f_k^2$$

transformieren kann, worin

$$f_1 = a_{10}(y-\mu) + a_{11}(\Delta y - \Delta\mu) + \cdots + a_{1k}(\Delta^k y - \Delta^k\mu),$$
$$f_2 = a_{20}(y-\mu) + a_{21}(\Delta y - \Delta\mu) + \cdots + a_{2k}(\Delta^k y - \Delta^k\mu),$$
$$\vdots$$
$$f_k = a_{k0}(y-\mu) + a_{k1}(\Delta y - \Delta\mu) + \cdots + a_{kk}(\Delta^k y - \Delta^k\mu)$$

ganze lineare Funktionen der Differenzen $(y-\mu), \Delta y - \Delta\mu, \cdots \Delta^k y - \Delta^k\mu$ und der Konstanten $a_{10}, a_{11} \cdots a_{1k}, a_{20} \cdots$ sind; ferner k_1, k_2, k_k irgend welche reelle Zahlen bedeuten.

Die erste Variation der Funktion $\log\varphi$ ist sodann:

$$\delta\log\varphi = -k_1^2 f_1 \delta f_1 - k_2^2 f_2 \delta f_2 \cdots - k_k^2 f_k \delta f_k$$

oder, wenn man für $y - \mu = u$ einsetzt,

$$= -k_1^2 f_1(a_{10}\delta u - a_{11}\delta\Delta u + \cdots + a_{1k}\delta\Delta^k u)$$
$$- k_2^2 f_2(a_{20}\delta u - a_{21}\delta\Delta u + \cdots + a_{2k}\delta\Delta^k u)$$
$$\vdots$$
$$- k_k^2 f_k(a_{k0}\delta u + a_{k1}\delta\Delta u + \cdots + a_{kk}\delta\Delta^k u)$$

oder endlich

$$= -(k_1^2 f_1 a_{10} + k_2^2 f_2 a_{20} + \cdots + k_k^2 f_k a_{k0})\delta u$$
$$- (k_1^2 f_1 a_{11} + k_2^2 f_2 a_{21} + \cdots + k_k^2 f_k a_{k1})\delta\Delta u$$
$$\vdots$$
$$- (k_1^2 f_1 a_{1k} + k_2^2 f_2 a_{2k} + \cdots + k_k^2 f_k a_{kk})\delta\Delta^k u.$$

Die Ausdrücke in der Klammer sind sämtlich wieder ganze, lineare Funktionen von $u, \Delta u, \Delta^2 u, \cdots \Delta^k u$ und sollen mit $F_0, F_1 \cdots F_k$ bezeichnet werden. Man erhält sodann

$$\delta \log \varphi = - F_0 \delta u - F_1 \delta \Delta u - F_2 \delta \Delta^2 u \cdots - F_k \delta \Delta^k u$$

und als Ausgleichsgleichung, indem man noch für $w_i - \mu_i = d_i$ einsetzt:

$$\sum_1^n [p_i^2 (d_i - u_i) \delta u_i - F_{0i} \delta u_i - F_{1i} \delta \Delta u_i - \cdots - F_{ki} \delta \Delta^k u_i] = 0. \quad \text{(X)}$$

Führt man endlich $\delta \Delta^\varrho u_i$ mit Hilfe der Beziehung

$$\delta \Delta^\varrho u_i = \delta u_{i+\varrho} - \varrho_1 \delta u_{i+\varrho-1} + \varrho_2 \delta u_{i+\varrho-2} \cdots$$

auf $\delta u_i, \delta u_{i+1} \cdots$ zurück, dann übergeht die Ausgleichsgleichung in

$$\sum_1^n [p_i^2 (d_i - u_i) - F_{0i} + (F_{1i} - F_{1i-1}) - (F_{2i} - 2F_{2i-1} + F_{2i-2}) + \cdots$$
$$+ - 1^{k-1} (F_{ki} - k_1 F_{ki-1} + k_2 F_{ki-2} \cdots)] \delta u_i = 0$$

$$= \sum_1^n [p_i^2 (d_i - u_i) - F_{0i} + \Delta F_{1,i-1} - \Delta^2 F_{2,i-2} + \cdots$$
$$+ - 1^{k-1} \Delta^k F_{k,i-k}] \delta u_i = 0.$$

Nachdem nun voraussetzungsgemäß keine andere Beziehung zwischen den Variationen in den einzelnen Werten der unabhängig Variablen besteht, so kann die obige Beziehung nur erfüllt sein, wenn die Faktoren bei jeder Variation für sich Null werden, wenn also:

$$p_i^2 (d_i - u_i) - F_{0i} + \Delta F_{1i-1} + \cdots + - 1^{k-1} \Delta^k F_{ki-k} = 0. \quad \text{(XI)}$$

Die Gleichung ist für alle x mit Ausnahme der k ersten und der k letzten (der Grenz-)Werte der ganzen Beobachtungsreihe gleich gebaut und daher *die Hauptgleichung der Variation*. Dieselbe ist eine lineare Differenzengleichung $2k^{\text{ter}}$ Ordnung. Die allgemeine Lösung der Gleichung hat $2k$ Konstante, deren Bestimmung nach den besonderen Bedingungen für die $2k$ Grenzgleichungen erfolgt.

Aus den obigen Entwickelungen ergibt sich demnach das folgende Theorem: *Wenn gemäß der Erwartung eine Beziehung zwischen je k Nachbarwerten vorausgesetzt werden kann, dann ist die ausgeglichene Funktion die Lösung einer linearen Differenzengleichung $2k^{\text{ter}}$ Ordnung.*

§ 55. Anwendungen zum zweiten Falle der Ausgleichung.

A. *Die Funktionen $f_1, f_2, \cdots f_k$ enthalten überhaupt keine Differenzen.* Ist also

$$f_1 = a_{10} u, \quad f_2 = a_{20} u, \quad \cdots \quad f_k = a_{k0} u,$$

und somit

$$\delta \log \varphi = -(k_1^2 a_{10}^2 + k_2^2 a_{20}^2 \cdots + k_k^2 a_{k0}^2) u_i \delta u_i = -P^2 u_i \delta u_i,$$

dann lautet die Hauptgleichung der Variation

$$p_i^2 (u_i - d_i) + P^2 u_i = 0,$$

woraus für

$$u_i = \frac{d_i p_i^2}{p_i^2 + P^2} \quad \text{und endlich für} \quad y_i = \frac{w_i p_i^2 + \mu_i P^2}{p_i^2 + P^2}$$

folgt. Daraus ergeben sich die folgenden Sätze:

1. *Wenn der Erfahrung über ein Wertesystem eine andere Erfahrung über dasselbe Wertesystem vorausgeht, so erfolgt die Ausgleichung nach den Regeln zweimaliger Beobachtung desselben Wertes. Der ausgeglichene Wert ist in jedem Werte der unabhängig Veränderlichen das arithmetische Mittel der Einzelbeobachtungen in diesem und das Gewicht die Summe der Gewichte in den einzelnen Beobachtungsreihen.*

2. *Der ausgeglichene Wert liegt, welches auch die Präzisionsmaßzahlen sind, zwischen den beiden beobachteten Werten.* Für $\frac{p_i}{P} = 0$, d. h. wenn die Präzisionsmaßzahl der alten Erfahrung gegenüber der der neuen Erfahrung verschwindet, ist $y_i = w_i$; der wahrscheinlichste Wert identifiziert sich in diesem Falle mit dem wahrscheinlichsten Werte der neuen Erfahrung. Will man zwischen beiden Gewichten nicht unterscheiden und setzt also $p_i = P$, so ist

$$y_i = \frac{w_i + \mu_i}{2}.$$

Man kann die Analysis für diesen speziellen Fall auch ausdehnen und voraussetzen, daß ϱ vorausgehende Erfahrungsreihen in jedem Wert der unabhängig Veränderlichen ϱ Werte für diesen, nämlich μ', μ'', $\cdots \mu^{\varrho}$ ergeben haben, ferner daß diesen die Präzisionsmaßzahlen $P_1, P_2, \cdots P_{\varrho}$ zukommen. Dann ist ohne weiteres ersichtlich, daß

$$y_i = \frac{w_i p_i^2 + \mu_i' P_1^2 + \mu_i'' P_2^2 + \cdots + \mu_i^{\varrho} P_{\varrho}^2}{p_i^2 + P_1^2 + P_2^2 + \cdots + P_{\varrho}^2} \qquad \text{(XII)}$$

sein müßte.

Die aus Formel XII ableitbaren Grundsätze werden nicht selten praktisch verwertet.

Aus derselben läßt sich die Zusammenlegung mehrerer Beobachtungen über dieselbe Erscheinung zu einer resultierenden Beobachtung rechtfertigen, beispielsweise die Zusammenfassung der Sterblichkeitsbeobachtungen der Bevölkerungsstatistik aus mehreren Kalenderjahren zu einer Gesamtbeobachtung.

Ferner kommt es vor, daß die nach mehreren Methoden (bezw. auch die von mehreren Ausgleichern nach der graphischen Methode)

abgeleiteten Resultate zu einem Mittel vereinigt werden. In diesem Falle ist jedes einzelne Ergebnis als eine nach anderen Prinzipien entwickelte Erwartung anzusehen.

Man kann endlich die Formel zur Änderung einer bereits abgeleiteten Ausgleichskurve verwenden, um hierdurch in dieser eine kleinere Quadratsumme der Fehlerquadrate zu erhalten. Hierzu ist es nur nötig, zwischen das Ausgleichsresultat und die beobachteten Werte eine neue Kurve einzuschalten.

B. *Die Wahrscheinlichkeitsfunktion φ lasse sich auf die Form*

$$\varphi = Ce^{-\frac{k_1^2}{2}(a_{10}u + a_{11}\Delta u + \cdots + a_{1k}\Delta^k u)^2}$$

zurückführen, worin a_{10}, $a_{11} \ldots a_{1k}$ konstant sind. Bezeichnet man für diesen Fall a_{10} mit α_0, a_{11} mit $\alpha_1 \ldots a_{1k}$ mit α_k, endlich k_i mit k, dann lautet die Ausgleichsgleichung:

$$p_i^2(d_i - u_i) - k^2(\alpha_0 f_i - \alpha_1 \Delta f_{i-1} + \alpha_2 \Delta^2 f_{i-2} \cdots) = 0.$$

Der Faktor bei k^2 soll als Form der Erwartung mit M bezeichnet werden; derselbe läßt sich, wie folgt, transformieren.

$$\begin{aligned}
M &= \alpha_0(\alpha_0 u_i + \alpha_1 \Delta u_i + \alpha_2 \Delta^2 u_i + \cdots + \alpha_k \Delta^k u_i) \\
&\quad - \alpha_1(\alpha_0 \Delta u_{i-1} + \alpha_1 \Delta^2 u_{i-1} + \alpha_2 \Delta^3 u_{i-1} + \cdots + \alpha_k \Delta^{k+1} u_{i-1}) \\
&\quad + \alpha_2(\alpha_0 \Delta^2 u_{i-2} + \alpha_1 \Delta^3 u_{i-2} + \alpha_2 \Delta^4 u_{i-2} + \cdots + \alpha_k \Delta^{k+2} u_{i-2}) \\
&\quad \vdots \\
&\quad + - 1^k \alpha_k(\alpha_0 \Delta^k u_{i-k} + \alpha_1 \Delta^{k+1} u_{i-k} + \cdots + \alpha_k \Delta^{2k} u_{i-k})
\end{aligned}$$

und wenn in der weitern Entwicklung der Index i weggelassen wird:

$$M = \alpha_0^2 u + (\alpha_0\alpha_1 \Delta u - \alpha_1\alpha_0 \Delta u_{-1}) + (\alpha_0\alpha_2 \Delta^2 u - \alpha_1\alpha_1 \Delta^2 u_{-1} + \alpha_0\alpha_2 \Delta^2 u_{-2}) + (\alpha_0\alpha_3 \Delta^3 u - \alpha_1\alpha_2 \Delta^3 u_{-1} + \alpha_2\alpha_1 \Delta^3 u_{-2} - \alpha_0\alpha_3 \Delta^3 u_{-3}) + \cdots$$

Nach Überführung der sämtlichen Differenzen auf die Werte der Funktion übersieht man mit Leichtigkeit die Richtigkeit der folgenden Sätze:

1. Es läßt sich der Faktor M als lineare Funktion der u_i mit konstanten und für gleichweit von u abstehende Glieder gleichen Koeffizienten darstellen; somit besteht also:

$$M = A_0 u + A_1(u_1 + u_{-1}) + A_2(u_2 + u_{-2}) + \cdots + A_k(u_k + u_{-k}). \quad \text{(XIII)}$$

Jeder in runde Klammer eingeschlossene Teil im vorletzten Ausdrucke von M hat nämlich die Form

$$\alpha_0\alpha_\varrho \Delta^\varrho u - \alpha_1\alpha_{\varrho-1} \Delta^\varrho u_{-1} + \alpha_2\alpha_{\varrho-2} \Delta^\varrho u_{-2} - \alpha_3\alpha_{\varrho-3} \Delta^\varrho u_{-3} + \cdots + - 1^\varrho \alpha_\varrho\alpha_0 \Delta^\varrho u_{-\varrho}.$$

Vereinigt man immer je zwei gleichweit vom Anfang und Ende der

Reihe abstehende Glieder, dann erhält man wegen der Gleichheit der Koeffizienten:

$$-1^{\sigma}\alpha_{\sigma}\alpha_{\varrho}(\Delta^{\varrho}u_{-\sigma}+-1^{\varrho}\Delta^{\varrho}u_{-\varrho+\sigma})=-1^{\sigma}\alpha_{\sigma}\alpha_{\varrho}(u_{\varrho-\sigma}-\varrho_1 u_{\varrho-\sigma-1}$$
$$+\varrho_2 u_{\varrho-\sigma-2}+-\cdots+-1^{\varrho}u_{-\sigma}+u_{-\varrho+\sigma}-\varrho_1 u_{-\varrho+\sigma-1}$$
$$+\varrho_2 u_{-\varrho+\sigma-2}+\cdots+-1^{\varrho}u_{\sigma}).$$

Die Form der Erwartung ist sonach eine ganze, gegen den Mittelwert symmetrische Funktion.

2. Zwischen α_0^2 und den Koeffizienten A besteht die Beziehung

$$\alpha_0^2=A_0+2A_1+2A_2+\cdots+2A_n.$$

Es ergänzen sich nämlich im Ausdrucke für M die Koeffizienten jeder Differenz für sich zu Null und es kann daher lediglich der Koeffizient von u restieren.

3. Die $k+1$ Koeffizienten $A_0, A_1, A_2\cdots A_k$ können als ganze Funktionen der $k+1$ Koeffizienten $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2\cdots\alpha_k$ durch das folgende Gleichungssystem dargestellt werden.

$$A_k=\alpha_k(k_0\alpha_0-\overline{k+1}_0\alpha_1+\overline{(k+2)}_0\alpha_2-\cdots+-1^k\overline{2k}_0\alpha_k)$$
$$A_{k-1}=-\alpha_k(k_1\alpha_0-\overline{k+1}_1\alpha_1+\overline{k+2}_1\alpha_2-\cdots+-1^k\overline{2k}_1\alpha_k)$$
$$+\alpha_{k-1}(\overline{k-1}_0\alpha_0-k_0\alpha_1+\overline{k+1}_0\alpha_2-\cdots+-1^k\overline{2k-1}_0\alpha_k)$$
$$A_{k-2}=\alpha_k(k_2\alpha_0-\overline{k+1}_2\alpha_1+\overline{k+2}_2\alpha_2+\cdots+-1^k\overline{2k}_2\alpha_k)$$
$$-\alpha_{k-1}(\overline{k-1}_1\alpha_0-k_1\alpha_1+\overline{k+1}_1\alpha_2+\cdots+-1^k\overline{2k-1}_1\alpha_k)$$
$$+\alpha_{k-2}(\overline{k-2}_0\alpha_0-\overline{k-1}_0\alpha_1+k_0\alpha_2+\cdots+-1^k\overline{2k-2}_0\alpha_k)$$
$$A_{k-3}=-\alpha_k(k_3\alpha_0-\overline{k+1}_3\alpha_1+\overline{k+2}_3\alpha_2+\cdots+-1^k\overline{2k}_3\alpha_k)$$
$$+\alpha_{k-1}(\overline{k-1}_2\alpha_0-k_2\alpha_1+\overline{k+1}_2\alpha_2+\cdots+-1^k\overline{2k-1}_2\alpha_k)$$
$$-\alpha_{k-2}(\overline{k-2}_1\alpha_0-\overline{k-1}_1\alpha_1+k_1\alpha_2+\cdots+-1^k\overline{2k-2}_1\alpha_k)$$
$$+\alpha_{k-3}(\overline{k-3}_0\alpha_0-\overline{k-2}_0\alpha_1+\overline{k-1}_0\alpha_2+\cdots+-1^k\overline{2k-3}_0\alpha_k)$$

usw. Das Bildungsgesetz ist darnach ohne weiteres ersichtlich. Es ist aber auch ferner zu entnehmen, daß man für jedes beliebige System der A_k ein bestimmtes System der α_k ableiten kann. Läßt man aber nur reelle A_k und α_k zu, dann sind die α_k gewissen Größenbedingungen unterworfen.[1])

---

1) Dieselben lassen sich für die einfachsten Funktionsformen leicht ableiten:

I.

Wenn $f=\alpha_0 u+\alpha_1\Delta u$, so heißt das Koeffizientensystem

$$A_1=\alpha_1(\alpha_0-\alpha_1),\quad A_0=-\alpha_0(\alpha_0-2\alpha_1),$$

daraus folgt

Im folgenden wird das Verhältnis eines Koeffizienten der Form der Erwartung im Abstande n vom mittleren Koeffizienten zu diesem

$$\alpha_0 = \sqrt{A_0 + 2A_1}, \quad \alpha_1 = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{A_0 + 2A_1} - \sqrt{A_0 - 2A_1}\right)$$

und $A_0 \geqq (2A_1)$, wenn $(2A_1)$ den absoluten Wert von $2A_1$ bezeichnet, ferner $A_0 > 0$. *A_1 kann demnach höchstens $\frac{A_0}{2}$ sein.*

Die dementsprechende Ausgleichsgleichung lautet

$$p_i^2(d_i - u_i) = k_1^2 A_1 (2u_i \pm (u_{i+1} + u_{i-1})).$$

Bei einer Beziehung zwischen zwei Nachbarwerten können die Koeffizienten vom mittleren zu den beiden Endgliedern in keinem geringeren Grade als die Binomialkoeffizienten $\binom{2}{1}$, $\binom{2}{0}$ abfallen.

II.

Wenn $f = \alpha_0 u + \alpha_1 \Delta u + \alpha_2 \Delta^2 u$, so heißt das Koeffizientensystem:

$$A_2 = \alpha_2(\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2)$$
$$A_1 = -\alpha_2(2\alpha_0 - 3\alpha_1 + 4\alpha_2) + \alpha_1(\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2)$$
$$A_0 = \alpha_2(\alpha_0 - 3\alpha_1 + 6\alpha_2) - \alpha_1(\alpha_0 - 2\alpha_1 + 3\alpha_2) + \alpha_0(\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2).$$

Daraus ergibt sich

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = \left(\sqrt{A_0 + 2A_1 + 2A_2} + \sqrt{A_0 - 2A_1 + 2A_2} + \sqrt{2\sqrt{(A_0 + 2A_2)^2 - 4A_1^2} + 2A_0 - 12A_2}\right) : 4$$
$$-\alpha_1 + \alpha_2 = \left(-3\sqrt{A_0 + 2A_1 + 2A_2} + \sqrt{A_0 - 2A_1 + 2A_2} + \sqrt{2\sqrt{(A_0 + 2A_2)^2 - 4A_1^2} + 2A_0 - 12A_2}\right) : 4$$
$$\alpha_2 = \left(\sqrt{A_0 + 2A_1 + 2A_2} + \sqrt{A_0 - 2A_1 + 2A_2} - \sqrt{2\sqrt{(A_0 + 2A_2)^2 - 4A_1^2} + 2A_0 - 12A_2}\right) : 4$$

und in Folge dessen

$$A_0 + 2A_2 > (2A_1)$$

und

$$4A_0A_2 > 8A_2^2 + A_1^2.$$

Für den Grenzfall beläuft sich demnach A_0 auf $6A_2$ und A_1 auf $4A_2$. Die dementsprechende Ausgleichsgleichung lautet:

$$p_i^2(d_i - u_i) = k_1^2 A_2 (6u_i \pm 4(u_{i+1} + u_{i-1}) + (u_{i+2} + u_{i-2})).$$

Bei einer Beziehung zwischen drei Nachbarwerten können die Koeffizienten der Form der Erwartung vom mittleren zu den beiden Endgliedern in keinem geringeren Grade als die Binomialkoeffizienten von $\binom{4}{2}$, $\binom{4}{1}$, $\binom{4}{0}$ abfallen.

III.

Wenn $f = \alpha_0 u + \alpha_1 \Delta u + \alpha_2 \Delta^2 u + \alpha_3 \Delta^3 u$, so lautet das Koeffizientensystem:

$$A_3 = \alpha_3(\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3),$$
$$A_2 = -\alpha_3(3\alpha_0 - 4\alpha_1 + 5\alpha_2 - 6\alpha_3) + \alpha_2(\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_0),$$
$$A_1 = \alpha_3(3\alpha_0 - 6\alpha_1 + 10\alpha_2 - 15\alpha_3) - \alpha_2(2\alpha_0 - 3\alpha_1 + 4\alpha_2 - 5\alpha_3) + \alpha_1(\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3),$$
$$A_0 = -\alpha_3(\alpha_0 - 4\alpha_1 + 10\alpha_2 - 20\alpha_3) + \alpha_2(\alpha_0 - 3\alpha_1 + 6\alpha_2 - 10\alpha_3) - \alpha_1(\alpha_0 - 2\alpha_1 + 3\alpha_2 - 4\alpha_3) + \alpha_0(\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3).$$

als Gefälle bezeichnet, und eine Form, in welcher das Größenverhältnis im Gefälle dem der Binomialkoeffizienten vom Exponenten der Gliederzahl der Form gleichkommt, eine solche vom geringsten Gefälle genannt.

Bezeichnet man in diesem Gleichungssystem $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3$ mit ϱ, $-\alpha_1 + 2\alpha_2 - 3\alpha_3$ mit η, $\alpha_2 - 3\alpha_3$ mit σ und endlich $-\alpha_3$ mit ϑ, so kann man dasselbe auf die vier Beziehungen

$$\begin{aligned}
&\varrho + \sigma + \eta + \vartheta = \sqrt{A_0 - 2A_1 + 2A_2 - 2A_3} = a\,,\\
&\varrho + \sigma - (\eta + \vartheta) = \sqrt{A_0 + 2A_1 + 2A_2 + 2A_3} = b\,,\\
&(\varrho - \sigma)^2 + (\eta - \vartheta)^2 = A_0 - 2A_2 = c\,,\\
&-\varrho(\eta - \vartheta) - \sigma(\eta + \vartheta) = A_1 - A_3 = d
\end{aligned}$$

reduzieren.

ϱ ergibt sich sodann als Wurzel der Gleichung vierten Grades:

$$\varrho^4 - \varrho^3 \frac{a+b}{2} + \varrho^2 \frac{a^2 + b^2 - 2c}{8} - \varrho \frac{(a-b)(4d + a^2 - b^2)}{4} + \frac{4d^2 + a^2 - b^2}{16} = 0.$$

Für den Grenzfall muß

$$A_0 + 2A_2 = 2A_1 + 2A_3$$

stattfinden. Unter Benützung dieser Beziehung reduziert sich das obige Gleichungssystem auf das einfachere System

$$\varrho + \sigma = \sqrt{A_1 + A_3}\,, \quad \eta + \vartheta = -\sqrt{A_1 + A_3}\,, \quad (\varrho - \sigma)^2 + (\eta - \vartheta)^2 = A_0 - 2A_2$$

und endlich auch

$$-\varrho(\eta - \vartheta) - \sigma(\eta + \vartheta) = A_1 - A_3\,.$$

Für ϱ ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\big(\sqrt{A_1 + A_3} + \sqrt{A_0 - A_1 - 2A_2 + 7A_3}\\
&+ \sqrt{A_0 - 2A_2 - 8A_3 + 2\sqrt{(A_1 + A_3)(A_0 - A_1 - 2A_2 + 7A_3)}}\big) : 4
\end{aligned}$$

Hieraus folgt für die Grenzfälle nebst der obigen Gleichung

$$\begin{aligned}
A_0 + 7A_3 &= A_1 + 2A_2\,,\\
A_0 &= 2A_2 + 8A_3
\end{aligned}$$

und für

$$A_2 = 6A_3\,, \quad A_1 = 15A_3\,, \quad A_0 = 20A_3\,.$$

Die dementsprechende Ausgleichsgleichung lautet:

$$p_i^2(d_i - u_i) = k_1^2 A_3 \big(20u_i \pm 15(u_{i+1} + u_{i-1}) + 6(u_{i+2} + u_{i-2}) \pm (u_{i+3} + u_{i-3})\big).$$

Bei einer Beziehung zwischen vier Nachbarwerten können die Koeffizienten der Form der Erwartung vom mittleren zu den Endgliedern in keinem geringeren Grade abfallen als die Binomialkoeffizienten $\binom{6}{3}$, $\binom{6}{2}$, $\binom{6}{1}$, $\binom{6}{0}$.

Für die behandelten drei Fälle kann man schließen, daß das Maximum der Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen der Erwartung und neuerlichen Erfahrung unter den beiden folgenden Voraussetzungen für M eintritt:

α) die Funktion M ist eine ganze Funktion mit abfallenden lediglich positiven oder stets abwechselnden Zeichen.

β) der geringste Abfall der Koeffizienten wird durch die allgemeine Funktion

4. Die Ausgleichsgleichung lautet

$$p_i^2(d_i - u_i) - k^2[A_0 u_i + A_1(u_{i+1} + u_{i-1}) + \cdots + A_k(u_{i+k} + u_{i-k})] \quad \text{(XIV)}$$

oder wenn man die Gleichung auf y zurückführt und die ausgeglichenen Werte auf dieselbe Seite der Gleichung schreibt:

$$y_i p_i^2 + k^2[A_0 y_i + A_1(y_{i+1} + y_{i-1}) + A_2(y_{i+2} + y_{i-2}) + \cdots A_k(y_{i+k} + y_{i-k})]$$
$$= w_i p_i^2 + k^2[A_0 \eta_i + A_1(\eta_{i+1} + \eta_{i-1}) + A_2(\eta_{i+2} + \eta_{i-2}) + \cdots + A_k(\eta_{i+k} + \eta_{i-k})].$$

Das Gesamtergebnis von Erwartung und Beobachtung kommt demnach allgemein auch dem Ergebnisse gleich, wenn man statt der erwarteten und beobachteten Werte die ausgeglichenen Werte einsetzt.

Man kann dieser Gleichung noch eine andere Form und damit eine andere Deutung geben. Es ist nämlich auch:

$$y_i = w_i - \frac{k^2}{p_i}[A_0(y_i - \eta_i) + A_1\{(y_{i+1} - \eta_{i+1}) + (y_{i-1} - \eta_{i-1})\} + \cdots]$$

das heißt:

Die Korrektur an dem unausgeglichenen Werte ist der Differenz zwischen den Ergebnissen einer Linearfunktion gleich, wenn man in diese einmal die ausgeglichenen und sodann die erwarteten Werte einsetzt.

5. Man kann für gewisse Grenzfälle leicht auch Ausgleichsformeln hinschreiben.

a) Für den Fall, daß die Abweichungen zwischen der neuen Erfahrung und der Ausgleichung nur klein sind, kann man auf der rechten Seite der Gleichung für $y = w$ setzen und erhält:

$$y_i = w_i - \frac{k^2}{p^2}\{A_0(w_i - \eta_i) + A_1[(w_{i+1} - \eta_{i+1}) + (w_{i-1} - \eta_{i-1})] + \cdots\}. \quad \text{(XV)}$$

$$M = A_k\Big[\binom{2k}{k} u_0 \pm \binom{2k}{k-1}(u_1 + u_{-1}) + \binom{2k}{k-2}(u_2 + u_{-2}) \pm \cdots + \pm (u_k + u_{-k})\Big]$$

dargestellt.

IV.

Für die Wahrscheinlichkeitsfunktionen der Erwartung

$$\varphi = Ce^{-\frac{k^2}{2}(\Delta^k u)^2} \quad \text{und} \quad \varphi = Ce^{-\frac{k^2}{2}(\Sigma^k u)^2},$$

sohin für die Voraussetzung, daß eine Erwartung nur bezüglich der k^{ten} Summen oder k^{ten} Differenzen besteht, wird die Funktion

$$M = -k^2\Big[-1^k\binom{2k}{k}u_0 + -1^{k-1}\binom{2k}{k-1}(u_1 + u_{-1}) + \cdots + (u_k + u_{-k})\Big]$$

bezw.

$$M = -k^2\Big[\binom{2k}{k}u_0 + \binom{2k}{k-1}(u_1 + u_{-1}) + \cdots + (u_k + u_{-k})\Big]$$

d. h. die Grenzfälle entsprechen der Erwartung einer bestimmten Summe oder einer bestimmten Differenz.

Die Korrektur der Beobachtung ist der Form der Erwartung proportional, wenn in diese die Abweichungen zwischen Beobachtung und Erwartung eingesetzt werden.

b) Für den Fall, daß der Erfahrung umgekehrt nur ein relativ kleines Gewicht gegenüber der Erwartung zufällt, daß also p gegen k^2 vernachlässigt werden kann, erhält man:

$$A_0 y_i + A_1(y_{i+1} + y_{i-1}) + \cdots = A_0\eta_i + A_1(\eta_{i+1} + \eta_{i-1}) \cdots,$$

welche Gleichung selbstredend die Lösungen $y_i = \eta_i$, $y_{i+1} = \eta_{i+1} \cdots$ annehmen muß.

6. Fallen in der ausgeglichenen Wertereihe die höheren Differenzen innerhalb des Ausgleichsbereiches derart rasch ab, daß $\Delta^2 y$, $\Delta^4 y \ldots$ gegen y vernachlässigt werden dürfen und besteht die Erwartung lediglich in einem Urteile über die *relative Lage* der ausgeglichenen Werte, welche in jedem Beobachtungspunkte mit der relativen Lage der beobachteten als den wahrscheinlichsten Werten verglichen wird, dann kann man einerseits für

$$w_i p_i^2 + k^2 [A_0\eta_i + A_1(\eta_{i+1} + \eta_{i-1}) + \cdots] = y_i(p_i^2 + k^2\alpha_0^2)$$

und für

$$A_0\eta_i + A_1(\eta_{i+1} + \eta_{i-1}) + \cdots = A_0 w_i + A_1(w_{i+1} + w_{i-1}) + \cdots$$

schreiben und es ergibt sich demnach als ausgeglichener Wert

$$y_i = \frac{w_i(p_i^2 + k^2 A_0) + k^2[(w_{i+1} + w_{i-1})A_1 + (w_{i+2} + w_{i-2})A_2 + \cdots]}{p_i^2 + k^2\alpha_0^2}. \qquad \text{(XVI)}$$

Somit sind die nach der zweiten Ausgleichsmethode resultierenden Ausgleichsformeln lineare Funktionen der nicht ausgeglichenen Werte mit gleichen Koeffizienten für die vom auszugleichenden Werte zu beiden Seiten gleich weit abstehenden Werte. Die Koeffizienten fallen vom mittleren Koeffizienten A_0 jedoch derart rasch ab, daß $\frac{A_\varrho}{A_k} < \frac{\binom{2k}{\varrho}}{\binom{2k}{k}}$.

Die hierher gehörigen Ausgleichsformeln geringsten Gefälles lauten demnach je nach der Anzahl der in den Ausgleichsbereich fallenden Punkte und zwar wenn der Ausgleichsbereich aus 3 Punkten besteht:

$$y_i = \frac{m w_i + n(w_{i+1} + w_{i-1})}{m + 2n}, \text{ wobei } m \geqq 2n,$$

wenn er aus 5 Punkten besteht:

$$y_i = \frac{m w_i + n[4(w_{i+1} + w_{i-1}) + w_{i+2} + w_{i-2}]}{m + 10n}, \text{ wobei } m \geqq 6n,$$

wenn er aus 7 Punkten besteht:

$$y_i = \frac{m w_i + n[15(w_{i+1} + w_{i-1}) + 6(w_{i+2} + w_{i-2}) + (w_{i+3} + w_{i-3})]}{m + 44\,n},$$

wobei $m \geqq 20\,n$ usf.

Für m, gleich der Minimalzahl, lauten die ausgeglichenen Werte im Abschnitte zwischen den Altern 35—52 der Absterbeordnung der 20 engl. Gesellschaften:

Alter	unausgeglichen	Ausgleichung mit je 3	5 Nachbarwerten	7
35	0,00824			
36	0,00885	0,00888		
37	0,00956	0,00957	0,00955	
38	0,01029	0,01019	0,01008	0,1000
39	0,01063	0,01036	0,01028	0,1023
40	0,00987	0,01021	0,01029	0,1031
41	0,01047	0,01038	0,01040	0,1043
42	0,01071	0,01062	0,01057	0,1067
43	0,01059	0,01092	0,01103	0,1102
44	0,01180	0,01164	0,01161	0,1163
45	0,01235	0,01225	0,01226	0,1226
46	0,01251	0,01288	0,01293	0,1295
47	0,01415	0,01373	0,01362	0,1369
48	0,01409	0,01440	0,01445	0,1448
49	0,01527	0,01528	0,01535	0,1567
50	0,01650	0,01642	0,01630	
51	0,01741	0,01708		
52	0,01702			

C) *In Erweiterung der bisher behandelten Formen könnte nun die Funktion für die Erwartung*

$$\varphi = Ce^{-k_1^2 f_1^2 - k_2^2 f_2^2 - \cdots - k_n^2 f_n^2}$$

der Erörterung unterzogen werden, worin $f_1, f_2, \cdots, f_n$ ganze, lineare Funktionen von y und von Differenzen dieser bedeuten. Es ist jedoch leicht zu sehen, daß man hierdurch zu keiner Erweiterung des Ausgleichsproblems gelangt, weil sich die Ausgleichsgleichung sodann wieder nur als lineare und ganze Funktion einer endlichen Anzahl von Differenzen darstellt.

Man übersieht die Richtigkeit der letzteren Behauptung auch aus der Form der Funktion φ. Ihre Verwendung in der Ausgleichsgleichung kann nämlich auch dahin interpretiert werden, daß der neuerlichen Erfahrung n Beobachtungen vorausgehen, deren jede den speziellen Ausdruck in einer linearen Differenzengleichung k^{ter} Ordnung findet und welche derart mit der neuerlichen Erfahrung in Verbindung gesetzt werden kann, daß diese zuerst etwa durch die Funktion f_1, das Endresultat durch die Funktion f_2, das neuerliche Resultat durch die Funktion f_3 usf. ausgeglichen wird.

D) Nach Bohlmann soll die Quadratsumme der Abweichungen der ausgeglichenen von den beobachteten Werten derart ein Minimum

werden, daß im ausgeglichenen Kurvenzug die Stärke der Schwankungen möglichst klein bleibt. Bezeichnet man noch mit γ das Gewicht, welches zwischen Erwartung und Beobachtung besteht, dann ist die Gleichung

$$\sum (y_x - w_x)^2 + \gamma^2 (y_{x+1} - y_x)^2 = \text{Min.} \qquad \text{(XVII)}$$

zu erfüllen.

Die daraus folgende Differenzengleichung lautet:

$$y_x - w_x = \gamma^2 \Delta^2 y_{x-1}.$$

Man kann diese Gleichung für kleine γ näherungsweise lösen, wenn man rechter Hand für

$$y_{x-1} = w_{x-1} + \gamma^2 \Delta^2 y_{x-2};$$

in die sodann entstehende Gleichung für

$$y_{x-2} = w_{x-2} + \gamma^2 \Delta^2 y_{x-3}$$

einsetzt usf. Ist $\Delta^{2k} y_{x-k}$ die erste vernachlässigbare Differenz, dann erhält man

$$y_x = w_x + \gamma^2 \Delta^2 w_{x-1} + \gamma^4 \Delta^4 w_{x-2} + \cdots + \gamma^{2k-2} \Delta^{2k-2} w_{x-k}.$$

Daraus leitet man die nachstehenden Näherungswerte ab:

$$\left.\begin{aligned}
y_x &= w_x \\
y_x &= (1 - 2\gamma^2)\, w_x + (w_{x+1} + w_{x-1}) \\
y_x &= (1 - 2\gamma^2 + 6\gamma^4)\, w_x + (1 - 4\gamma^2)(w_{x+1} + w_{x-1}) + (w_{x+2} \\
&\qquad + w_{x-2}) \\
y_x &= (1 - 2\gamma^2 + 6\gamma^4 - 20\gamma^6)\, w_x + (1 - 4\gamma^2 + 15\gamma^4)(w_{x+1} + w_{x-1}) \\
&\qquad + (1 - 6\gamma^2)(w_{x+2} + w_{x-2}) + (w_{x+3} + w_{x-3})
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(XVII}_1\text{)}$$

§ 56. Der dritte Fall der Ausgleichung. (Die allgemeine Lösung.) Der dritte Fall der Ausgleichung geht aus dem ersten Falle durch Zerlegung der entsprechenden Ausgleichsgleichung in mehrere Partialgleichungen hervor, welche untereinander in keinerlei Beziehung stehen. Hierbei kann es selbstredend zu einer Korrektur wahrscheinlichster Werte nur dann kommen, wenn die Zahl der Konstanten des Gesetzes kleiner als die Zahl der in eine Wertgruppe einbezogenen Beobachtungen ist. Sodann unterscheidet sich aber der dritte Fall der Ausgleichung prinzipiell in nichts von dem ersten.

Trotzdem wird er besonders behandelt. Die Funktion der statistischen Massenerscheinung ist in der Regel unbekannt: doch kann man jede Funktion im engen Umkreis durch andere Funktionen (Taylorsche oder Biermannsche Reihen) näherungsweise darstellen, was im vorliegenden Fall eine um so größere Berechtigung hat, als die Be-

obachtungsfehler den Fehler einer unrichtigen Funktionswahl in der Regel überragen werden.

Unter solchen Erwägungen erwächst im vorliegenden Falle ein völlig neues Problem. Während im ersten Falle der Ausgleichung zu gegebener Funktion ein bestes Konstantensystem gesucht wird, ist im dritten Falle der näherungsweise richtige, beste Funktionscharakter zu bestimmen. Die Entscheidung über das Gelingen der Ausgleichung kann nur a posteriori, d. h. durch den Vergleich des Ergebnisses mit der Beobachtung erfolgen. Darum erscheint es nützlich, das Ausgleichsergebnis für gewisse Funktionsgruppen allgemein zu entwickeln.

Die analytische Behandlung wird, gleich wie für den ersten Fall der Ausgleichung, von ganzen linearen Funktionen der Konstanten ausgehen. Setzt man demnach zunächst für

$$y = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_\mu f_\mu,$$

wobei die $a_1, a_2, \cdots, a_\mu$ Konstante und $f_1, f_2, \cdots, f_\mu$ bestimmte Funktionen der unabhängig Veränderlichen sind, dann lautet die Ausgleichsgleichung:

$$\sum_1^n p_i(y_i - w_i)(f_{1i}\delta a_1 + f_{2i}\delta a_2 + \cdots + f_{\mu i}\delta a_\mu) = 0,$$

woraus unmittelbar, für $m_i = p_i(y_i - w_i)$, das System folgt:

$$\begin{aligned} &m_1 f_{11} + m_2 f_{12} + \cdots + m_n f_{1n} = 0,\\ &m_1 f_{21} + m_2 f_{22} + \cdots + m_n f_{2n} = 0,\\ &\vdots\\ &m_1 f_{\mu 1} + m_2 f_{\mu 2} + \cdots + m_n f_{\mu n} = 0. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Konstanten leitet man sodann ab:

$$\begin{aligned} &a_1[p_i f_{1i}^2] + a_2[p_i f_{2i} f_{1i}] + \cdots + a_\mu[p_i f_{\mu i} f_{1i}] = [p_i w_i f_{1i}],\\ &a_1[p_i f_{1i} f_{2i}] + a_2[p_i f_{2i}^2] + \cdots + a_\mu[p_i f_{\mu i} f_{2i}] = [p_i w_i f_{2i}],\\ &\vdots\\ &a_1[p_i f_{1i} f_{\mu i}] + a_2[p_i f_{2i} f_{\mu i}] + \cdots + a_\mu[p_i f_{\mu i}^2] = [p_i w_i f_{\mu i}] \end{aligned}$$

und hieraus für:

$$a_\varrho = \begin{vmatrix} [p_i f_{1i}^2] & \cdots [p_i f_{\varrho-1\,i} f_{1i}] & [p_i w_i f_{1i}] & [p_i f_{\varrho+1\,i} f_{1i}] & \cdots [p_i f_{\mu i} f_{1i}] \\ [p_i f_{1i} f_{2i}] & \cdots [p_i f_{\varrho-1\,i} f_{2i}] & [p_i w_i f_{2i}] & [p_i f_{\varrho+1\,i} f_{2i}] & \cdots [p_i f_{\mu i} f_{2i}] \\ \vdots & & & & \\ [p_i f_{1i} f_{\mu i}] & \cdots [p_i f_{\varrho-1\,i} f_{\mu i}] & [p_i w_i f_{\mu i}] & [p_i f_{\varrho+1\,i} f_{\mu i}] & \cdots [p_i f_{\mu i}^2] \end{vmatrix} : \Delta \quad \text{(XVIII)}$$

und insbesondere für Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} [p_i f_{1i}^2] & \cdots [p_i f_{\varrho-1\,i} f_{1i}][p_i f_{\varrho i} f_{1i}] \cdots [p_i f_{ui} f_{1i}] \\ [p_i f_{1i} f_{2i}] \cdots [p_i f_{\varrho-1\,i} f_{2i}][p_i f_{\varrho i} f_{2i}] \cdots [p_i f_{ui} f_{2i}] \\ \vdots \\ [p_i f_{1i} f_{ui}] \cdots [p_i f_{\varrho-1\,i} f_{ui}][p_i f_{\varrho i} f_{ui}] \cdots [p_i f_{ui}^2] \end{vmatrix}.$$

Aus der letzteren Gleichung kann man unmittelbar schließen, daß sich die Ausgleichsfunktion innerhalb der ganzen Wertgruppe, demnach zwischen y_1 und y_n durch die beobachteten Werte w_1, w_2, $w_3 \cdots w_n$ darstellt; die ausgeglichene Funktion ist demnach immer von der Form: $\varphi_1 w_1 + \varphi_2 w_2 + \cdots + \varphi_n w_n$, wenn φ_1, φ_2, $\cdots \varphi_n$ nur mehr von x abhängen.

Verlegt man nun den Anfangspunkt des Systems in $\frac{n}{2}$ und bezeichnet die sodann resultierenden $\varphi_{\frac{n}{2}}$ mit χ_0, $\varphi_{\frac{n}{2}+1}$ mit χ_1, $\varphi_{\frac{n}{2}-1}$ mit $\chi_{-1}\cdots$ sohin auch φ_1 mit $\chi_{-\left(\frac{n}{2}-1\right)}$ und φ_n mit $\chi_{\frac{n}{2}}$, so erhält man

$$y = \chi_0 w_0 + \chi_1 w_1 + \chi_{-1} w_{-1} + \chi_2 w_2 + \chi_{-2} w_{-2} + \cdots \qquad \text{(XIX)}$$

Der dem Punkte $x = 0$ korrespondierende ausgeglichene Wert entsteht, wenn man in χ_0, χ_1, $\chi_{-1}\cdots$ für $x = 0$ setzt.

Im nachstehenden sollen einige spezielle Fälle behandelt werden.

§ 57. Anwendungen zum dritten Falle der Ausgleichung.

1. Für den Fall, daß in der Funktion y nur *eine* willkürliche Konstante vorhanden, daß also $y = af$ ist, erhält man als Ausgleichsfunktion

$$y = \frac{[wpf]}{[pf^2]} f.$$

Wird darin f selbst einer Konstanten gleich gesetzt, so ergibt sich

$$y = \frac{[wp]}{[p]} \quad \text{und für} \quad p_1 = p_2 = \cdots = p_n:$$

$y = \frac{[w]}{n}$, als deren spezieller Fall Finlaisons-(Wittsteins)-Formel

$$y = \frac{w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5}{5}$$

aufgefaßt werden kann.

2. Ein besonderes Interesse nehmen die parabolischen Kurven als Ausgleichskurven, also die Kurven der Form

$$y = a_0 + a_1 x + \cdots + a_u x^u$$

für den Fall in Anspruch, daß die Gewichte konstant sind.

Wenn man voraussetzt, daß zur Ausgleichung der Beobachtung im Werte der unabhängig Veränderlichen $x_0 = 0$ die Beobachtung in

diesem Werte und in ϱ vorausgehenden und ebenso vielen nachfolgenden äquidistanten Punkten gegeben sind, dann hat man zur Ableitung der Ausgleichsgleichung

$$\sum(a_0 + a_1 x_k + a_2 x_k^2 + \cdots + a_\mu x_k^\mu - w_k)(\delta a_0 + \delta a_1 x_k + \cdots + \delta a_\mu x_k^\mu) = 0$$
$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \pm \varrho$$

zu setzen. Wird allgemein mit

$[x^\lambda]$ die Summe $x_{-\varrho}^\lambda + x_{-\varrho+1}^\lambda + \cdots + x_0^\lambda + x_1^\lambda + \cdots + x_\varrho^\lambda$

bezeichnet, dann hat man die Konstanten für y aus dem nachstehenden Gleichungssystem zu entwickeln:

$$\begin{array}{llll}
a_0(2\varrho+1) + a_1[x] & + a_2[x^2] & + \cdots + a_\mu[x^\mu] & = [w] \\
a_0[x] + a_1[x^2] & + a_2[x^3] & + \cdots + a_\mu[x^{\mu+1}] & = [wx] \\
a_0[x^2] + a_1[x^3] & + a_2[x^4] & + \cdots + a_\mu[x^{\mu+2}] & = [wx^2] \\
\vdots & & & \\
a_0[x^\mu] + a_1[x^{\mu+1}] & + a_2[x^{\mu+2}] & + \cdots + a_\mu[x^{2\mu}] & = [wx^\mu].
\end{array}$$

Speziell für den Beobachtungspunkt $x_0 = 0$ leitet man daraus die nachstehende Ausgleichsformel ab:

$$y = \begin{vmatrix} [w] & [x] & [x^2] & \cdots [x^\mu] \\ [wx] & [x^2] & [x^3] & \cdots [x^{\mu+1}] \\ \vdots & & & \\ [wx^\mu] & [x^{\mu+1}] & [x^{\mu+2}] & \cdots [x^{2\mu}] \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2\varrho+1 & [x] & [x^2] & \cdots [x^\mu] \\ [x] & [x^2] & [x^3] & \cdots [x^{\mu+1}] \\ \vdots & & & \\ [x^\mu] & [x^{\mu+1}] & [x^{\mu+2}] & \cdots [x^{2\mu}] \end{vmatrix} \quad \text{(XX)}$$

Weil nun $[x] = [x^3] = \cdots = [x^{2i+1}] = 0$,

$$[x^{2\nu}] = 2(1^{2\nu} + 2^{2\nu} + \cdots + \varrho^{2\nu}),$$

so übergeht die Formel für y in

$$y = \begin{vmatrix} [w] & 0 & [x^2] & \cdots [x^\mu] \\ [wx] & [x^2] & 0 & \\ \vdots & & & \\ [wx^\mu] & & [x^{2\mu}] & \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2\varrho+1 & 0 & [x^2] & \cdots [x^\mu] \\ 0 & [x^2] & 0 & \cdots \\ \vdots & & & \\ [x^\mu] & & & [x^{2\mu}] \end{vmatrix}$$

Für μ als einer geraden Zahl kann man ableiten:

$$\begin{vmatrix} 2\varrho+1 & 0 & [x^2] & \cdots [x^\mu] \\ 0 & [x^2] & 0 & \cdots 0 \\ [x^2] & 0 & [x^4] & \cdots [x^{\mu+2}] \\ \vdots & & & \\ [x^\mu] & 0 & [x^{\mu-2}] & \cdots [x^{2\mu}] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (2\varrho+1)[x^2] & \cdots [x^\mu] & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ [x^2] & [x^4] & \cdots [x^{\mu+2}] & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ [x^4] & [x^6] & \cdots [x^{\mu+4}] & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ [x^\mu] & [x^{\mu+2}] & \cdots [x^{2\mu}] & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [x^2][x^4] & \cdots [x^\mu] & & \\ 0 & 0 & 0 & [x^4][x^6] & \cdots [x^{\mu+2}] & & \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & [x^\mu][x^{\mu+2}] & \cdots [x^{2\mu}] & & \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2\overline{\varrho+1}[x^2] & \cdots [x^\mu] \\ [x^2] \quad [x^4] & \cdots [x^{\mu+2}] \\ \vdots & \\ [x^\mu] \quad [x^{\mu+2}] & \cdots [x^{2\mu}] \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} [x^2][x^4] & \cdots [x^\mu] \\ [x^4][x^6] & \cdots [x^{\mu+2}] \\ \vdots & \\ [x^\mu][x^{\mu+2}] & \cdots [x^{2\mu}] \end{vmatrix}$$

und ebenso

$$\begin{vmatrix} [w] & 0 & [x^2] & \cdots [x^\mu] \\ [wx] & [x^2] & 0 & \cdots \quad 0 \\ [wx^2] & 0 & [x^4] & \cdots [x^{\mu+2}] \\ \vdots & & & \\ [wx^\mu] & 0 & [x^{\mu+2}] & \cdots [x^{2\mu}] \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} [w] & [x^2] & \cdots [x^\mu] \\ [wx^2] & [x^4] & \cdots [x^{\mu+2}] \\ \vdots & & \\ [wx^\mu] & [x^{\mu+2}] & \cdots [x^{2\mu}] \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} [x^2][x^4] & \cdots [x^\mu] \\ [x^4][x^6] & \cdots [x^{\mu+2}] \\ \vdots & \\ [x^\mu][x^{\mu+2}] & \cdots [x^{2\mu}] \end{vmatrix};$$

endlich für y, das dem Wert $x = 0$ entspricht,

$$y = \begin{vmatrix} [w] & [x^2] & [x^4] & \cdots [x^\mu] \\ [wx^2] & [x^4] & [x^6] & \cdots [x^{\mu+2}] \\ [wx^4] & [x^6] & [x^8] & \cdots [x^{\mu+4}] \\ \vdots & & & \\ [wx^\mu] & [x^{\mu+2}] & [x^{\mu+4}] & \cdots [x^{2\mu}] \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \overline{2\varrho+1}[x^2] & [x^4] & [x^6] & \cdots [x^\mu] \\ [x^2] & [x^4] & [x^6] & \cdots [x^{\mu+2}] \\ [x^4] & [x^6] & [x^8] & \cdots [x^{\mu+4}] \\ \vdots & & & \\ [x^\mu] & [x^{\mu+2}] & [x^{\mu+4}] & \cdots [x^{2\mu}] \end{vmatrix} \quad \text{(XXI)}$$

Für μ als einer ungeraden Zahl erhält man in gleicher Entwicklung

$$y = \begin{vmatrix} [w] & [x^2] & [x^4] & \cdots [x^{\mu-1}] \\ \vdots & & & \\ [wx^{\mu-1}] & [x^{\mu+1}] & [x^{\mu+3}] & \cdots [x^{2\mu-2}] \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \overline{2\varrho+1}[x^2] & [x^4] & \cdots [x^{\mu-1}] \\ \vdots & & \\ [x^{\mu-1}] & [x^{\mu+1}] & \cdots [x^{2\mu-2}] \end{vmatrix} \quad \text{(XXI')}$$

Hieraus folgt

a) *Die für den Mittelwert einer parabolischen Kurve $2n^{ter}$ Ordnung bestehende Ausgleichsfunktion gilt immer auch für eine Kurve $\overline{2n+1}^{ter}$ Ordnung.*

b) *In der Ausgleichskurve kommen nur $[w]$, $[wx^2] \cdots [wx^{2\mu}]$ vor, während die Glieder $[wx]$, $[wx^3] \cdots [wx^{2\mu-1}]$ aus der Rechnung herausfallen.*

Speziell wird für $y = a_0 + a_1 x$

$$y_0 = \begin{vmatrix} [w] & 0 \\ [wx] & [x^2] \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \overline{2\varrho+1} & 0 \\ 0 & [x^2] \end{vmatrix} = \frac{[w]}{\overline{2\varrho+1}}. \quad \text{(XXII)}$$

Für $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ oder $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ ergibt sich

$$y_0 = \frac{[w][x^4] - [wx^2][x^2]}{(2\varrho+1)[x^4] - [x^2]^2}. \qquad \text{(XXII')}$$

Bei Benützung von 5 Nachbarwerten zur Ausgleichung wird

$$y_0 = \frac{17 w_0 + 12(w_1 + w_{-1}) - 3(w_2 + w_{-2})}{35}$$
$$= 0{,}485\, w_0 + 0{,}343\,(w_1 + w_{-1}) - 0{,}086\,(w_2 - w_{-2}),$$

bei Benützung von 7 Nachbarwerten

$$y_0 = \frac{7 w_0 + 6(w_1 + w_{-1}) + 3(w_2 + w_{-2}) - 2(w_3 + w_{-3})}{21}$$
$$= 0{,}333\, w_0 + 0{,}286\,(w_1 + w_{-1}) + 0{,}143\,(w_2 + w_{-2}) - 0{,}095\,(w_3 + w_{-3}),$$

bei Benützung von 9 Nachbarwerten

$$y_0 = \frac{59 w_0 + 54(w_1 + w_{-1}) + 39(w_2 + w_{-2}) + 14(w_3 + w_{-3}) - 21(w_4 + w_{-4})}{231}$$
$$= 0{,}255\, w_0 + 0{,}234\,(w_1 + w_{-1}) + 0{,}169\,(w_2 + w_{-2})$$
$$+ 0{,}061\,(w_3 + w_{-3}) - 0{,}091\,(w_4 + w_{-4}).$$

3. Zu einer Verallgemeinerung der obigen Entwickelungen gelangt man durch Einführung der Ausgleichsfunktion

$$y = a_0 + a_1 \varphi(x) + a_2 \varphi(x)^2 + \cdots a_\mu \varphi(x)^\mu,$$

worin $\varphi(x)$ eine ganz bestimmte Funktion von x mit bekannten Koeffizienten bedeutet und die $a_0, a_1, a_2 \cdots a_\mu$ der Variation unterliegen.

Hieraus ergibt sich die Ausgleichsformel für den Mittelwert:

$$y = \begin{vmatrix} [w] & [\varphi] & [\varphi^2] & \cdots [\varphi^\mu] \\ [w\varphi] & [\varphi^2] & [\varphi^3] & \cdots [\varphi^{\mu+1}] \\ [w\varphi^2] & [\varphi^3] & [\varphi^4] & \cdots [\varphi^{\mu+2}] \\ \vdots & & & \\ [w\varphi^\mu] & [\varphi^{\mu+1}] & [\varphi^{\mu+2}] & \cdots [\varphi^{2\mu}] \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2\varrho+1 & [\varphi] & [\varphi^2] & \cdots [\varphi^\mu] \\ [\varphi] & [\varphi^2] & [\varphi^3] & \cdots [\varphi^{\mu+1}] \\ [\varphi^2] & [\varphi^3] & [\varphi^4] & \cdots [\varphi^{\mu+2}] \\ \vdots & & & \\ [\varphi^\mu] & [\varphi^{\mu+1}] & [\varphi^{\mu+2}] & \cdots [\varphi^{2\mu}] \end{vmatrix} \qquad \text{(XXIII)}$$

und wieder beziehen sich die Summen auf

$$x = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots \pm \varrho.$$

Für $\varphi(x)$ als einer ungeraden Funktion, d. i. wenn $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ und $\varphi(0) = 0$, ferner für μ als einer geraden Zahl erhält man

$$y = \begin{vmatrix} [w] & [\varphi^2] & \cdots [\varphi^\mu] \\ [w\varphi^2] & [\varphi^4] & \cdots [\varphi^{\mu+2}] \\ \vdots & & \\ [w\varphi^\mu] & [\varphi^{\mu+2}] & \cdots [\varphi^{2\mu}] \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2\varrho+1 & [\varphi^2] & \cdots [\varphi^\mu] \\ [\varphi^2] & [\varphi^4] & \cdots [\varphi^{\mu+2}] \\ \vdots & & \\ [\varphi^\mu] & [\varphi^{\mu+2}] & \cdots [\varphi^{2\mu}] \end{vmatrix}. \qquad \text{(XXIII')}$$

Gemäß den bisherigen Entwicklungen leitet man die folgenden speziellen Fälle ab: Für $y = a_0 + a_1\varphi(x)$ folgt

$$y_0 = \frac{[w][\varphi^2] - [\varphi][\varphi w]}{(2\varrho+1)[\varphi^2] - [\varphi]^2}.$$

Ist $\varphi(x)$ eine ungerade Funktion, dann wird, weil $[\varphi] = 0$ ist,

$$y = \frac{[w]}{2\varrho+1}.$$

Für jede Funktion $\varphi(x)$ gibt es nun nach den obigen Erörterungen eine doppelte Mannigfaltigkeit von Ausgleichsfunktionen, zu denen man gelangt, wenn man einerseits μ abändert, andererseits die Zahl der Beobachtungspunkte, über welche die Summen in der Ausgleichsfunktion auszudehnen sind, vervielfacht. Die Mannigfaltigkeiten für die vorstehende Funktion $y = a_0 + a_1\varphi(x)$ sind aus der folgenden Formel zu entnehmen:

$$y_0 = \frac{1}{(2\varrho+1)[\varphi^2] - [\varphi]^2}\Big\{([\varphi^2] - \varphi(0)[\varphi])w_0 + ([\varphi^2] - \varphi(1)[\varphi])w_1 + ([\varphi^2] - \varphi(-1)[\varphi])w_{-1} + \cdots\Big\}$$

Hierin ist φ kurzweg für $\varphi(x)$ gesetzt. Für $\varphi(-x) = \varphi(x)$ gelangt man zu der in den Koeffizienten symmetrischen Formel:

$$y_0 = \frac{1}{2\varrho+1}\frac{1}{[\varphi^2] - [\varphi]^2}\Big\{([\varphi^2] - \varphi(0)[\varphi])w_0 + ([\varphi^2] - \varphi(1)[\varphi])(w_1 + w_{-1}) + \cdots\Big\}.$$

Setzt man z. B. für $\varphi(x) = \alpha + \gamma x^2$ und verwendet drei Nachbarwerte zur Ausgleichung, so erhält man:

$$y_0 = \frac{2(\alpha+\gamma)w_0 - \alpha(w_1 + w_{-1})}{2\gamma},$$

Für $\alpha = -1$ und $\gamma = 2$ wird hieraus die Filipowskische Formel

$$y = \frac{2w_0 + w_1 + w_{-1}}{4}.$$

Es ist ohne weiteres ersichtlich, daß die letztabgeleitete Ausgleichsformel in jede ganze und in den Koeffizienten symmetrische Funktion bei geeigneter Wahl von $\varphi(x)$ übergehen kann.

Für

$$y_x = A_0 w_x + A_1(w_{x+1} + w_{x-1}) + A_2(w_{x+2} + w_{x-2}) + \cdots$$

hat man lediglich die Bestimmungsgleichung zu erfüllen

$$A_i = \frac{[\varphi^2] - \varphi(i)[\varphi]}{2\varrho+1[\varphi^2] - [\varphi]^2} = \alpha - \varphi(i)\beta,$$

wenn man für

$$\alpha = \frac{[\varphi^2]}{2\varrho + 1[\varphi^2] - [\varphi]^2} \quad \text{und für} \quad \beta = \frac{[\varphi]}{2\varrho + 1[\varphi^2] - [\varphi]^2}$$

einsetzt.

§ 58. Die mechanischen Ausgleichskurven. Man hat vielfach Formeln konstruiert, durch welche irgend ein ausgeglichener mit dem korrespondierenden unausgeglichenen Wert und einer gleichen Anzahl (n) von Nachbarwerten zu beiden Seiten desselben in Beziehung gesetzt werden soll. Das gemeinsame dieser Formeln besteht darin, daß die Koeffizienten zum mittleren Wert symmetrisch sind und sich zu 1 ergänzen. Allgemein ist demnach

$$y_x = a_0 w_x + a_1(w_{x+1} + w_{x-1}) + a_2(w_{x+2} + w_{x-2}) + \cdots + a_n(w_{x+n} + w_{x-n}),$$

wobei $a_0 + 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = 1$.

Bei der Ableitung von derlei Formeln macht man von zweierlei Prinzipien Gebrauch:

1. Es wird eine Gruppe von benachbarten Beobachtungswerten zur Ausgleichung des mittleren Wertes unter diesen benützt und zu dem Behufe angenommen, daß die beobachteten Werte innerhalb der Gruppe ein bestimmtes Gesetz erfüllen, welches durch die Werte der Gruppe mehrfach und sohin auch nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung in bester Art, etwa als arithmetisches Mittel der Einzelwerte, dargestellt werden kann.

2. Das nach einem solchen Verfahren ermittelte Ausgleichsresultat wird zur Grundlage für die Wiederholung des Prozesses nach dem gleichen Verfahren genommen.

Das erste Prinzip soll an der Wollhouseschen, Karupschen und Spragueschen Formel, das letztere Prinzip an Highams Formeln erläutert werden.

Zu Wollhousens Formel gelangt man durch folgende Vorschriften: 1. Es werden die Beobachtungen in 15 benachbarten äquidistanten Punkten w_{-7}, w_{-6}, w_{-5}, $\cdots w_0$, $w_1 \cdots w_7$ zur Ausgleichung des mittleren Wertes y_0 verwendet und durch die Endpunkte von je drei dieser, etwa w_{-5}, w_0, w_5; w_{-6}, w_{-1}, w_4; w_{-4}, w_1, w_6; w_{-7}, w_{-2}, w_3; w_{-3}, w_2, w_7 als Ordinaten eines ebenen rechtwinkligen Koordinatensystems dargestellten Wahrscheinlichkeitswerte, welche je durch 5 Beobachtungspunkte getrennt sind, Parabeln 2. Ordnung gelegt. 2. Die hierdurch erhaltenen 5 Parabeln können, und zwar jede für sich, näherungsweise als ausgeglichene Kurven betrachtet werden und geben demnach 5 Werte für den auszugleichenden Wert y_0; der aus-

geglichene Wert ist als arithmetisches Mittel der gefundenen 5 Werte anzusehen.

Verlegt man den auszugleichenden Wert in den Wert der unabhängig Veränderlichen Null und bezeichnet die Indizes von zwei auf beiden Seiten des auszugleichenden Wertes liegenden Werten mit ± 1, ± 2, allgemein mit $\pm r$, dann kommt der Parabel mit dem Scheitelpunkt n die Gleichung

$$y = a_n + b_n x + c_n x^2$$

zu. Stehen endlich je zwei beobachtete Werte um die Strecke α auseinander, so wird jedes Konstantensystem durch die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} w_{n-5} &= a_n + b_n \alpha (n-5) + c_n \alpha^2 (n-5)^2 \\ w_n &= a_n + b_n \alpha n \qquad\quad + c_n \alpha^2 n^2 \\ w_{n+5} &= a_n + b_n \alpha (n+5) + c_n \alpha^2 (n+5)^2 \end{aligned}$$

bestimmt. Daraus ergibt sich

$$c_n = \frac{1}{50\alpha^2} \Delta^2 w_{n-5},\ b_n = \frac{1}{5\alpha} \Delta w_{n-5} - \frac{1}{50\alpha^2} \Delta^2 w_{n-5} (2n-5)\alpha,$$

$$\begin{aligned} a_n &= w_{n-5} - \alpha (n-5) \frac{\Delta w_{n-5}}{5\alpha} + n(n-5)\alpha^2 \frac{\Delta^2 w_{n-5}}{50\alpha^2} \\ &= w_{n-5} \frac{n^2 - n + 5}{25} + w_{n-5} \frac{n(n+5)}{50} + w_{n+5} \frac{n(n-5)}{50}. \end{aligned}$$

Jede Parabel gibt für irgend einen Wert x einen Bestimmungspunkt; die fünf Parabeln demnach 5 Bestimmungspunkte. Im auszugleichenden Werte $x = 0$ sind die Werte der Parabeln

$$a_0,\ a_1,\ a_{-1},\ a_2,\ a_{-2}.$$

Der ausgeglichene Wert ist demnach

$$y = \tfrac{1}{5} (a_{-2} + a_{-1} + a_0 + a_1 + a_2),$$

oder wenn man schließlich in diese Formel die w substituiert,

$$\begin{aligned} y_x = {}_1\tfrac{1}{2}{}_5 [&25 w_x + 24 (w_{x+1} + w_{x-1}) + 21 (w_{x+2} + w_{x-2}) + 7 (w_{x+3} + w_{x-3}) \\ &+ 3 (w_{x+4} + w_{x-4}) - 2 (w_{x+6} + w_{x-6}) - 3 (w_{x+7} + w_{x-7})]. \end{aligned} \qquad \text{(XXIV)}$$

Die Formel wird überaus häufig angewendet. Hierbei bedient man sich mit Vorteil der folgenden Transformation: Bezeichnet man mit ${}_k\sigma_5$ die Summe von 5 Nachbargliedern, welche w_{x+k} in der Mitte lassen, sohin mit ${}_k\sigma_5 = w_{x+k} + (w_{x+k+1} + w_{x+k-1}) + (w_{x+k+2} + w_{x+k-2})$ und mit ${}_0\sigma_5 = w_x + w_{x+1} + w_{x-1} + w_{x+2} + w_{x-2}$; ferner mit ${}_0\sigma_{5,5}$ die iterierte Funktion

$$\begin{aligned} {}_0\sigma_{5,5} &= {}_0\sigma_5 + {}_1\sigma_5 + {}_{-1}\sigma_5 + {}_2\sigma_5 + {}_{-2}\sigma_5 = \\ &= 5 w_x + 4 (w_{x+1} + w_{x-1}) + 3 (w_{x+2} + w_{x-2}) \\ &\quad + 2 (w_{x+3} + w_{x-3}) + (w_{x+4} + w_{x-4}), \end{aligned}$$

endlich mit ${}_0\sigma_{5,5,5}$ die zweifach iterierte Funktion, also

$$\begin{aligned}{}_0\sigma_{5,5,5} &= {}_0\sigma_{5,5} + {}_{-1}\sigma_{5,5} + {}_1\sigma_{5,5} + {}_{-2}\sigma_{5,5} + {}_2\sigma_{5,5}\\ &= 19w_x + 18(w_{x+1}+w_{x-1}) + 15(w_{x+2}+w_{x-2}) + 10(w_{x+3}+w_{x-3})\\ &\quad + 6(w_{x+4}+w_{x-4}) + 3(w_{x+5}+w_{x-5}) + w_{x+6} + w_{x-6},\end{aligned}$$

dann erkennt man leicht durch Substitution, daß die Wollhousesche Formel auch gleichkommt

$$y_x = [10_0\,\sigma_{5,5,5} - 3({}_{-1}\sigma_{5,5,5} + {}_0\sigma_{5,5,5} + {}_1\sigma_{5,5,5})] : 125. \qquad (\text{XXIV}_1)$$

Zu *Karups Ausgleichsformel* gelangt man in ganz ähnlicher Art. Es werden die Beobachtungen in je 20 benachbarten äquidistanten Punkten zur Ausgleichung des zehnten Wertes verwendet. Zu diesem Behufe werden die beobachteten Wahrscheinlichkeitswerte in 5 Quadrupel zerlegt, deren Einzelwerte wieder durch je 5 Beobachtungspunkte getrennt sind.

Dieselben seien beispielsweise, wenn für w_{x+i} kurzweg w_i gesetzt wird, w_{-5}, w_0, w_5, w_{10}; w_{-6}, w_{-1}, w_4, w_9; $w_{-7}, w_{-2}\, w_3, w_8$; w_{-8}, w_{-3}, w_2, w_7, w_{-9}, w_{-4}, w_1, w_6. Durch jedes der Quadrupel wird nun eine Parabel 3. Ordnung bestimmt, welche durch die beiden mittleren Werte hindurchgeht und deren Tangenten in diesen Punkten mit der Abszisse die gleichen Winkel bilden, wie die durch die mittleren Werte und die benachbarten Beobachtungswerte hindurchgehende Parabel 2. Ordnung, welche also die letztere oskuliert. Jede Kurve 3. Ordnung gibt für den zehnten Wert y_0 einen rechnungsmäßigen Wert; das arithmetische Mittel der 5 rechnungsmäßigen Werte ist der ausgeglichene Wert.

Verlegt man den 10. Beobachtungswert in die Abszisse Null, so wird für jede Parabel, welche durch n und $n+5$ hindurchgeht, das nachstehende Gleichungssystem erfüllt sein müssen:

1. $w_n = a_n + b_n n + c_n n^2 + d_n n^3$,
2. $w_{n+5} = a_n + b_n(n+5) + c_n(n+5)^2 + d_n(n+5)^3$.

Ferner aber auch, weil

$$w_{n+5} = w_n + 5w'_n + \tfrac{25}{2} w''_n$$

und

$$w_{n-5} = w_n - 5w'_n + \tfrac{25}{2} w''_n,$$

worin w'_n und w''_n die Derivierten bezeichnen,

3. $w'_n = \frac{w_{n+5} - w_{n-5}}{10} = b_n + 2c_n n + 3d_n n^2$,
4. $w'_{n+5} = \frac{w_{n+10} - w_n}{10} = b_n + 2c_n(n+5) + 3d_n(n+5)^2$.

Löst man nun dieses Gleichungssystem auf und bezeichnet hierbei mit

$$\Delta w_{n-5} = w_n - w_{n-5}$$
$$\Delta^2 w_{n-5} = w_{n+5} - 2w_n + w_{n-5}$$
$$\Delta^3 w_{n-5} = w_{n+10} - 3w_{n+5} + 3w_n - w_{n-5},$$

so erhält man für

$$d_n = \frac{\Delta^3 w_{n-5}}{250}; \quad c_n = \frac{1}{50}\left[\Delta^2 w_{n-5} - \frac{1}{5}\Delta^3 w_{n-5}(3n+5)\right],$$
$$b_n = \frac{1}{10}\left[2\Delta w_n - \frac{1}{5}\Delta^2 w_{n-5}(2n+5) + \frac{n}{25}\Delta^3 w_{n-5}(3n+10)\right],$$
$$a_n = w_n - \frac{n}{5}\Delta w_n + \frac{n(n+5)}{50}\Delta^2 w_{n-5} - \frac{n^2(n+5)}{250}\Delta^3 w_{n-5}.$$

Der Wert a_n identifiziert sich in jeder der Parabeln mit dem rechnungsmäßigen Wert im zehnten Beobachtungspunkte. Falls man sich bei der Ermittlung des ausgeglichenen Wertes lediglich auf a_0, a_{-1}, a_{-2}, a_{-3}, a_{-4}, also solche a beschränkt, welche durch w_{-9}, $w_{-8}\cdots$, $w_6\cdots w_9$, w_{10} darstellbar sind, so wird

$$y = \tfrac{1}{5}(a_0 + a_{-1} + a_{-2} + a_{-3} + a_{-4}) \qquad \text{(XXV)}$$

oder endlich auch

$$y_x = \tfrac{1}{1250}[250w_x + 228(w_{x+1} + w_{x-1}) + 174(w_{x+2} + w_{x-2})$$
$$+ 106(w_{x+3} + w_{x-3}) + 42(w_{x+4} + w_{x-4}) - 16(w_{x+6} + w_{x-6})$$
$$- 18(w_{x+7} + w_{x-7}) - 12(w_{x+8} + w_{x-8}) - 4(w_{x+9} + w_{x-9})].$$

Zur Verwendung dieser überaus beliebten Formel eignet sich wieder besser die nachstehende mit der obigen identische Formel:

$$y_x = \tfrac{1}{1250}[6({}_{-1}\sigma_{5,5,5} + {}_0\sigma_{5,5,5} + {}_1\sigma_{5,5,5}) - 4({}_{-3}\sigma_{5,5,5} + {}_3\sigma_{5,5,5})] \qquad \text{(XXVI)}$$

Die Spraguesche Ausgleichsformel wird entwickelt, indem man zur Bestimmung jedes rechnungsmäßigen Wertes 30 benachbarte, beobachtete Werte heranzieht. Dieselben bestimmen 5 Parabeln 5. Ordnung, und zwar je 6 um je 5 Punkte auseinander stehende Werte eine Parabel in der Art, daß selbe durch je zwei um 5 Punkte getrennte Werte geht und in diesen Derivierte 1. und 2. Ordnung besitzt, welche mit den gleichen Derivierten jener Parabel 4. Ordnung übereinstimmt, die wieder durch die beiden Punkte und die beiden folgenden und vorausgehenden, durch je 5 Beobachtungspunkte geschiedenen Punkte hindurchgelegt wird. Die 5 Parabeln werden sodann, gleich wie im Wollhouseschen oder Karupschen Ausgleichsverfahren zur Berechnung eines Mittelwertes für den 15. Beobachtungswert benützt.

Sprague hat die Ausgleichsformel in der folgenden überaus ein-

fachen, auch auf die Herleitung der Wollhouseschen und Karupschen Methode anwendbaren Art entwickelt.

Bezeichnet man unter w_0 und w_1 die beiden Werte, durch welche eine der 5 Parabeln hindurchgeht, legt den ersten Punkt in den Koordinatenanfangspunkt und nimmt für die Größe des die beiden Punkte trennenden Intervalles 1 an, dann ist die Gleichung dieser Parabel

$$y_x = w_0 + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5,$$

wobei die Koeffizienten den folgenden Bedingungen genügen müssen.

Aus dem Hindurchgehen der Kurve durch den Wert w_1 folgt zunächst

1. $w_1 = w_0 + a + b + c + d + e.$

Und weil die Parabel 4. Ordnung, welche durch $w_{-2}, w_{-1}, w_0, w_1, w_2$ bestimmt ist, die Gleichung

$$y_x = w_{-2} + \binom{x+2}{1} \Delta w_{-2} + \frac{(x+2)(x+1)}{1\cdot 2} \Delta^2 w_{-2} + \frac{(x+2)(x+1)x}{1\cdot 2\cdot 3} \Delta^3 w_{-2} + \frac{(x+2)(x+1)x(x-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \Delta^4 w_{-2}$$

erfüllt (worin $\Delta w_{-2} = w_{-1} - w_{-2}$ usw.), so werden sich aus der geforderten Übereinstimmung der beiden ersten Derivierten dieser Parabel mit den entsprechenden Derivierten der gesuchten Parabel sodann ergeben

2. $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = a = \Delta w_{-2} + \frac{3}{2} \Delta^2 w_{-2} + \frac{1}{3} \Delta^3 w_{-2} - \frac{1}{12} \Delta^4 w_{-2}.$

3. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 = 2b = \Delta^2 w_{-2} + \Delta^3 w_{-2} - \frac{1}{12} \Delta^4 w_{-2}.$

Ebenso werden aber, weil die Übereinstimmung der Derivierten der Parabel im Punkte 1 mit der Parabel der 4. Ordnung

$$y_x = w_{-1} + \binom{x+1}{1} \Delta w_{-1} + \frac{(x+1)x}{1\cdot 2} \Delta^2 w_{-1} + \frac{(x+1)x(x-1)}{1\cdot 2\cdot 3} \Delta^3 w_{-1} + \frac{(x+1)x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \Delta^4 w_{-1}$$

oder mit der mit ihr identischen Parabel

$$= w_{-2} + \binom{x+2}{1} \Delta w_{-2} + \frac{(x+2)(x+1)}{1\cdot 2} \Delta^2 w_{-2} + \frac{(x+2)(x+1)x}{1\cdot 2\cdot 3} \Delta^3 w_{-2} + \frac{(x+2)(x+1)x(x-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \Delta^4 w_{-2} + \frac{(x+1)x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \Delta^5 w_{-2}$$

herzustellen sein wird, noch die Bedingungen

$$4.\ a + 2b + 3c + 4d + 5e = \Delta w_{-2} + \frac{5}{2} \Delta^2 w_{-2} + \frac{11}{6} \Delta^3 w_{-2} + \frac{1}{4} \Delta^4 w_{-2} - \frac{1}{12} \Delta^5 w_{-2},$$

5. $2b + 6c + 12d + 20e = \Delta^2 w_{-2} + 2\Delta^3 w_{-2} + \frac{11}{12}\Delta^4 w_{-2} - \frac{1}{12}\Delta^5 w_{-2}$

zu erfüllen sein.

Aus den somit abgeleiteten 5 Gleichungen ergibt sich nun für die Konstanten

$$\begin{aligned} a &= \Delta + \tfrac{3}{2}\Delta^2 + \tfrac{1}{3}\Delta^3 - \tfrac{1}{12}\Delta^4 \\ b &= \tfrac{1}{2}\Delta^2 + \tfrac{1}{2}\Delta^3 - \tfrac{1}{24}\Delta^4 \\ c &= \tfrac{1}{6}\Delta^3 + \tfrac{1}{12}\Delta^4 + \tfrac{7}{24}\Delta^5 \\ d &= \tfrac{1}{24}\Delta^4 - \tfrac{1}{2}\Delta^5 \\ e &= \tfrac{5}{24}\Delta^5, \end{aligned}$$

wenn für $\Delta^k w_{-2}$ überall kurzweg Δ^k geschrieben wird.

Die gesuchte Gleichung lautet somit

$$y_x = w_0 + \left(\Delta + \tfrac{3}{2}\Delta^2 + \tfrac{1}{3}\Delta^3 - \tfrac{1}{12}\Delta^4\right)x + \left(\tfrac{1}{2}\Delta^2 + \tfrac{1}{2}\Delta^3 - \tfrac{1}{24}\Delta^4\right)x^2 + \left(\tfrac{1}{6}\Delta^3 + \tfrac{1}{12}\Delta^4 + \tfrac{7}{24}\Delta^5\right)x^3 + \left(\tfrac{1}{24}\Delta^4 - \tfrac{1}{2}\Delta^5\right)x^4 + \tfrac{5}{24}\Delta^5 x^5.$$

Aus dieser Grundgleichung gelangt man zur Gleichung aller 5 Parabeln mit dem Scheitel im Koordinatenanfangspunkte, wenn man den Werten w_0 und w_1 der Reihe nach die beobachteten Werte in den Punkten 10 und 15, 11 und 16, 12 und 17, 13 und 18, 14 und 19 beilegt. Von jeder dieser Parabeln benötigt man aber nur immer einen Wert, nämlich den Wert für $x = \frac{2}{5}$ der Parabel, welche durch die Punkte 10 und 15; den Wert für $x = \frac{1}{5}$ der Parabel, welche durch die Punkte 11 und 16; den Wert für $x = 0$ der Parabel, welche durch die Punkte 12 und 17 ... hindurchgeht.

Wenn man die auf solche Art berechneten Werte addiert und die Summe durch 5 dividiert, gelangt man schließlich zur folgenden Ausgleichsformel

$$\begin{aligned} y_x = 0{,}2\, w_x &+ 0{,}18688\,(w_{x+1} + w_{x-1}) + 0{,}14528\,(w_{x+2} + w_{x-2}) \\ &+ 0{,}08768\,(w_{x+3} + w_{x-3}) + 0{,}03488\,(w_{x+4} + w_{x-4}) \\ &- 0{,}01952\,(w_{x+6} + w_{x-6}) - 0{,}02272\,(w_{x+7} + w_{x-7}) \\ &- 0{,}01472\,(w_{x+8} + w_{x-8}) - 0{,}00512\,(w_{x+9} + w_{x-9}) \\ &+ 0{,}00256\,(w_{x+11} + w_{x-11}) + 0{,}00288\,(w_{x+12} + w_{x-12}) \\ &+ 0{,}00160\,(w_{x+13} + w_{x-13}) + 0{,}00032\,(w_{x+14} + w_{x-14}). \end{aligned}$$

Nach Highams Formeln wird, so wie nach Wollhouse, zuerst die beste Gerade gesucht, welche mit Hilfe irgend einer ungeraden Anzahl von Nachbarwerten (p) auf Grund der Methode der kleinsten Quadrate gefunden werden kann. Es ergibt sich hierfür, wie aus den Ergebnissen des vorhergehenden Paragraphen hervorgeht,

$$y = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_p}{p}.$$

Wird dieser Wert als der ausgeglichene *Mittelwert*, also das Ergebnis für $x = \frac{p-1}{2}$ angesehen und das Verfahren an jedem Punkte wiederholt, so erhält man eine neue ausgeglichene Kurve. Man kann diese nun als Originalkurve betrachten und je q benachbarte Werte in derselben Art zur Ausgleichung benützen. Wenn man die Ergebnisse dieser zweiten Ausgleichung wieder zur weiteren Ausgleichung durch Benützung von je r Werten verwendet, so erhält man eine neue Form usf. Die Ergebnisse können allgemein in der folgenden Art entwickelt werden.

Wird eine allgemeine Zahlenreihe (welche etwa zu den Abszissen 0, 1, 2, 3, $\cdots$ gehörig betrachtet werden kann) mit u_0, u_1, u_2, u_3, $\cdots$ bezeichnet, so läßt sich das ϱ^{te} Glied durch

$$(1 + \Delta)^{\varrho-1} u_0$$

darstellen, sobald nach beendigter Potenzierung der Exponent von Δ als Operationsindex für Δ angesehen wird. Die Summe von p Gliedern u_0, u_1, u_2, $\cdots$, u_{p-1} ist daher

$$\frac{(1 + \Delta)^p - 1}{\Delta} u_0.$$

Die Glieder, mit welchen die zweiten Summierungen vorgenommen werden, sind

$$\frac{(1 + \Delta)^p - 1}{\Delta} u_0, \quad \frac{(1 + \Delta)^p - 1}{\Delta} u_1, \quad \cdots \quad \frac{(1 + \Delta)^p - 1}{\Delta} u_{\varrho-1}.$$

Als Resultat von q Gliedern ergibt sich wieder

$$\left(\frac{(1 + \Delta)^{p+q} - (1 + \Delta)^p - (1 + \Delta)^q + 1}{\Delta^2} \right) u_0 = \left(\frac{(1 + \Delta)^p - 1}{\Delta} \cdot \frac{(1 + \Delta)^q - 1}{\Delta} \right) u_0.$$

Addiert man von den auf solche Weise erhaltenen Gliedern je r benachbarte Glieder, dann wird resultieren

$$\left(\frac{(1 + \Delta)^p - 1}{\Delta} \cdot \frac{(1 + \Delta)^q - 1}{\Delta} \cdot \frac{(1 + \Delta)^r - 1}{\Delta} \right) u_0.$$

Zur Transformation der Formel kann man jedes der Schlußresultate mit

$$p\, u_{\frac{p-1}{2}} = p(1 + \Delta)^{\frac{p-1}{2}} u_0,$$

$$pq\,u_{\frac{p+q-2}{2}} = pq(1+\Delta)^{\frac{p+q-2}{2}}\,u_0,$$

$$pqr\,u_{\frac{p+q+r-3}{2}} = pqr(1+\Delta)^{\frac{p+q+r-3}{2}}\,u_0,$$

allgemein das Resultat der Reihe von

$$\frac{(1+\Delta)^{p_1}-1}{\Delta}\cdot\frac{(1+\Delta)^{p_2}-1}{\Delta}\cdots\frac{(1+\Delta)^{p_\varrho}-1}{\Delta}\,u_i \text{ mit } p_1\cdot p_2\cdots p_\varrho\,u_{\frac{p_1+p_2\cdots+p_\varrho-\varrho}{2}}$$

vergleichen.

Man erhält

$$\frac{(1+\Delta)^{p_1}-1}{\Delta}\,u_i = p_1\left[(1+\Delta)^{\frac{p_1-1}{2}} + \frac{p_1^2-1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\Delta^2 + \frac{(p_1^2-1)(p_1-3)}{2\cdot4\cdot6}\Delta^3+\cdots\right]u_i,$$

$$\frac{(1+\Delta)^{p_1}-1}{\Delta}\cdot\frac{(1+\Delta)^{p_2}-1}{\Delta}\,u_i = p_1\,p_2\left[(1+\Delta)^{\frac{p_1+p_2-2}{2}} + \frac{p_1^2+p_2^2-2}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\Delta^2\right.$$

$$\left. + \frac{(p_1^2+p_2^2-2)(p_1+p_2-4)}{2\cdot4\cdot6}\Delta^3+\cdots\right]u_i$$

endlich allgemein, wenn man mit

$$M = p_1\,p_2\,p_3,\cdots p_\varrho$$
$$A = p_1+p_2+p_3+\cdots+p_\varrho$$
$$K = p_1^2+p_2^2+p_3^2+\cdots+p_\varrho^2$$

bezeichnet,

$$\frac{(1+\Delta)^{p_1}-1}{\Delta}\cdot\frac{(1+\Delta)^{p_2}-1}{\Delta}\cdots\frac{(1+\Delta)^{p_\varrho}-1}{\Delta}\,u_i = M\left[(1+\Delta)^{\frac{A-\varrho}{2}}\right.$$

$$\left. + \frac{B-\varrho}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\left(\Delta^2+\frac{A-\varrho+2}{2}\Delta^3\right)+\cdots\right]u_0.$$

Wird noch die wiederholte Summierung auf der linken Seite der Gleichung mit $\sigma_{p_1,p_2,\cdots,p_\varrho}$ bezeichnet und für

$$(1+\Delta)^{\frac{A-\varrho}{2}}\,u_0 = u_{\frac{A-\varrho}{2}}$$

eingeführt, dann erhält man auch

$$u_{\frac{A-\varrho}{2}} = \frac{\sigma_{p_1,p_2,\cdots,p_\varrho}}{M} - \frac{B-\varrho}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\left(\Delta^2+\frac{A-\varrho+2}{2}\Delta^3\right)u_0 \quad \text{(XXVII)}$$

als Ausgleichsformel.

Daraus folgt:

Es läßt sich jede beliebige Reihe von Zahlenwerten bis auf zweite, dritte und höhere Differenzen durch eine andere Reihe darstellen, deren Glieder gebildet sind, wenn man je p_1 benachbarte Glieder summiert und durch p_1 dividiert, je p_2 benachbarte Glieder dieser Reihe summiert und durch p_2 dividiert usf

Wenn jedoch — wie dies meist der Fall ist — die Δ^2 und Δ^3 also auch die $\Delta^2 + \frac{A-\varrho+2}{2}\Delta^3$ stets dasselbe Zeichen tragen, dann wird der ausgeglichene Wert gegenüber dem ursprünglichen Wert durch jede neue Summierung im selben Sinne modifiziert.

Die Mortalitäts- und Invaliditätskurven sind Zahlenreihen von der genannten Eigenschaft; für sie ist das Korrektionsglied

$$\left(\Delta^2 + \frac{A-\varrho+2}{2}\Delta_3\right) u_0$$

positiv und daher der ausgeglichene Wert immer größer, als der unausgeglichene Wert.

Higham versucht den durch den Ausgleichsprozess in die Rechnung getragenen Fehler dadurch zu korrigieren, daß er an derselben Reihe die Ausgleichung zweimal und zwar derart wiederholt, daß das Korrektionsglied das gleiche wird. Hierzu ist notwendig und hinreichend, daß $A - \varrho = A' - \varrho'$ wird, wenn A und ϱ die oben definierten Größen zum ersten, A' und ϱ' diese Größen zum zweiten Prozess bedeuten. Wäre also

$$u_{\frac{A-\varrho}{2}} = \frac{\sigma_{p_1, p_2, \cdots, p_\varrho}}{M} - \frac{B-\varrho}{1\ 2\cdot 3\cdot 4}\left(\Delta^2 + \frac{A-\varrho}{2}\Delta^3\right) + \cdots$$

und

$$u_{\frac{A'-\varrho'}{2}} = \frac{\sigma_{p_1', p_2', \cdots, p_{\varrho'}}}{M'} - \frac{B'-\varrho'}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\left(\Delta^2 + \frac{A'-\varrho'}{2}\Delta^3\right),$$

dann resultiert

$$u_{\frac{A-\varrho}{2}} = u_{\frac{A'-\varrho'}{2}} = \left[\frac{\sigma_{p_1, p_2, \cdots, p_\varrho}}{M}(B'-\varrho') - \frac{\sigma_{p_1', p_2', \cdots, p_{\varrho'}}}{M}(B-\varrho)\right] : (B'-B-(\varrho'-\varrho)).$$

Higham leitet daraus zwei Ausgleichsformeln ab, welche leicht zu bilden sind:

$$u_8 = \frac{64\,\sigma_{5,5,5,5,5}}{10000} - \frac{4\,\sigma_{5,5,5,9}}{300} = 0{,}2106\,u_0 + 0{,}192\,(u_1+u_{-1}) + 0{,}14186\,(u_2+u_{-2})$$
$$+ 0{,}07946\,(u_3+u_{-3}) + 0{,}024\,(u_4+u_{-4}) - 0{,}0053\,(u_5+u_{-5})$$
$$- 0{,}016\,(u_6+u_{-6}) - 0{,}0144\,(u_7+u_{-7}) - 0{,}00693\,(u_8+u_{-8})$$

ferner:

$$u_8 = \frac{2\,\sigma_{5,5,5,4,2} - 3\,\sigma_{5,5,5,5}}{125} = 0{,}200\,u_0 + 0{,}192\,(u_1+u_{-1}) + 0{,}144\,(u_2+u_{-2})$$
$$+ 0{,}080\,(u_3+u_{-3}) + 0{,}024\,(u_4+u_{-4}) - 0{,}016\,(u_6+u_{-6})$$
$$- 0{,}016\,(u_7+u_{-7}) - 0{,}008\,(u_8+u_{-8}).$$

§ 59. Versuche zur Erläuterung der mechanischen Ausgleichsformeln. Man kann die mechanischen Ausgleichsmethoden verschieden begründen. Nach der vorausgehenden Darstellung erscheinen sie sämtlich *auf das Prinzip des Mittelwertes* zurückgeführt. Der Unterschied der Methoden liegt in der Verschiedenartigkeit der Bestimmung der rechnungsmäßigen Werte der Erscheinung.

In den Methoden von Wollhouse, Karup und Sprague werden beispielsweise die *rechnungsmäßigen* Werte auf dem Wege der *Interpolation* entwickelt. Die beobachteten Werte werden in so viele Gruppen gleich weit voneinander abstehender, immer je durch eine bestimmte Anzahl äquidistanter Punkte getrennter Werte zerlegt, als rechnungsmäßige Werte für jeden Punkt erzeugt werden sollen und die Zwischenwerte durch die Annahme gewonnen, daß sich durch die beobachteten Werte Parabeln der zweiten bis fünften Ordnung legen lassen.

In den Highamschen Formeln macht man von dem Satze Gebrauch, daß bei stetigen Funktionen sich jeder Wert bis auf sehr kleine Größen erster Ordnung der Kleinheit (bis auf erste Differenzen) durch die Nachbarwerte, bis auf sehr kleine Größen zweiter Ordnung der Kleinheit (bis auf zweite Differenzen) durch die Summe zweier auf beiden Seiten gleich weit abstehender Werte erzeugen lassen müsse.

Inbezug auf den Wert einer bestimmten Formel vermag man aber aus der Entstehungsweise im allgemeinen kein begründetes Urteil zu fällen. Von vornherein scheint nur klar, *daß durch die Einbeziehung einer größeren Anzahl von Werten in die Rechnung die Ebnung der Werte, welche Ursache auch den Änderungen zugrunde liegt, durch ein möglichst großes Gewicht der Mittelwerte das Prävalieren der letzteren, also das Anschmiegen an die ursprüngliche Form der Kurve begünstigt wird.* Nicht zu entscheiden vermag man jedoch über die Kraft der Formeln, Fehler zu eliminieren.

Hinsichtlich der Fehler wirken nämlich die beiden Operationen der mechanischen Ausgleichsformeln, die Interpolation und die Wahl des arithmetischen Mittels, entgegengesetzt. Die Interpolationsformeln selbst *vergrößern die Fehler* desto mehr, je größer die Ordnung der in ihr aufscheinenden Differenzen ist; die Mittelwertbildung dagegen wirkt auf die *Aufhebung* der Fehler ein. Um die erstere Behauptung einzusehen, bezeichne man mit u_x, u_{x+1}, u_{x+2}, $\cdots$, u_{x+n} die $n+1$ wahren und unter v_x, v_{x+1}, v_{x+2}, $\cdots$, v_{x+n} die $n+1$ beobachteten Erscheinungswerte; dann gilt für jeden interpolierten Wert:

$$v_{x+\varepsilon} = v_x + \varepsilon_1 \Delta v_x + \varepsilon_2 \Delta^2 v_x + \cdots$$

Die Fehler des interpolierten Wertes sind infolgedessen:

$$\varrho_{x+\varepsilon} = v_{x+\varepsilon} - u_{x+\varepsilon} = v_x - u_x + \varepsilon_1 \Delta(v_x - u_x) + \varepsilon_2 \Delta^2(v_x - u_x) + \cdots$$
$$= \varrho_x + \varepsilon_1 \Delta\varrho_x + \varepsilon_2 \Delta^2 \varrho_x + \cdots$$

Nun besteht

$$\Delta^k \varrho_x = \varrho_{x+k} - k_1 \varrho_{x+k-1} + k_2 \varrho_{x+k-2} + \cdots$$

Wenn aber die Fehler in den aufeinanderfolgenden Beobachtungspunkten (wie bei genaueren Beobachtungen vorausgesetzt werden muß) für Nachbarwerte der Größe nach fast gleich sind, dem Zeichen nach wechseln, dann ist $\Delta^k \varrho_x$ nahezu die Summe der Absolutwerte der obigen Reihe.

Für

$$(\varrho_{x+k}) = (\varrho_{x+k+1}) = \cdots = \varrho$$

wird

$$\Delta^k \varrho_x = \varrho(1 + k_1 + k_2 + \cdots) = \varrho \cdot 2^k$$

Es entsteht demnach die Frage, ob man nicht die mechanischen Ausgleichsmethoden auf anderem Wege, etwa auf Grund der Ergebnisse der 2. und 3. Ausgleichsmethode, welche beide zu festen Typen in der *Art der mechanischen Ausgleichsformeln* führen, beurteilen könne.

Aus den Erörterungen zum zweiten Fall der Ausgleichung ist zu entnehmen, daß alle abgeleiteten mechanischen Formeln den allgemeinen Aufbau der dort entwickelten Ausgleichsformeln tatsächlich besitzen.

Es erübrigt demnach die Entscheidung, ob das Gefälle der Konstanten nicht unter dem der Binomialkoeffizienten jenes Exponenten liegt, welcher der Anzahl der in die Ausgleichung eintretenden Glieder gleichkommt. Zu diesem Behufe erscheint in der nachfolgenden Tabelle das Verhältnis der Folgeglieder zu den mittleren Gliedern einiger bekannteren Ausgleichsformeln und der entsprechenden Binomialkoeffizienten entwickelt.

Größenverhältnis zum Mittelgliede beim Einflusse von n Gliedern.

Abstand vom Mittelgliede	$n = 14$		$n = 16$		$n = 18$		$n = 28$	
	Wollhouse	Binomialkoeffizienten	Higham	Binomialkoeffizienten	Karup	Binomialkoeffizienten	Sprague	Binomialkoeffizienten
0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
1	0,960	0,875	0,960	0,889	0,912	0,900	0,934	0,933
2	0,840	0,583	0,720	0,622	0,696	0,655	0,726	0,759
3	0,280	0,292	0,400	0,339	0,424	0,381	0,438	0,536
4	0,120	0,106	0,120	0,141	0,168	0,176	0,174	0,328
5	—	0,027	0,080	0,043	—	0,063	—	0,173
6	0,080	0,004	0,080	0,009	0,064	0,037	0,098	0,078
7	0,120	0,000	0,040	0,001	0,072	0,004	0,113	0,030
8	—	—	—	—	0,048	0,001	0,074	0,010
9	—	—	—	—	0,016	—	0,026	0,003
10	—	—	—	—	—	—	—	—

Aus der Tabelle folgt, daß bei den anerkannt besten Ausgleichsformeln das Gefälle der Koeffizienten der den Mittelgliedern zunächst stehenden Glieder nahezu mit dem Gefälle der entsprechenden Reihe der Binomialkoeffizienten übereinstimmt.

Im dritten Falle der Ausgleichung kann die Ausgleichsformel für den mittleren Wert eines Bereiches jede willkürliche Gestalt annehmen, bestimmt aber sodann alle Werte des ganzen Bereiches, für welchen sie abgeleitet ist. Beispielsweise müßte bei Wittsteins Formel das Ergebnis

$$y_x = \frac{1}{5}(w_{x-2} + w_{x-1} + w_x + w_{x+1} + w_{x+2})$$

als ausgeglichener Wert im Punkte x und den beiden vorangehenden und folgenden Beobachtungspunkten gelten. *Wenn jedoch nach der Art der mechanischen Methoden die Formel für jeden Beobachtungspunkt neu ermittelt, also*

$$y_{x+1} \text{ durch } \frac{1}{5}(w_{x-1} + w_x + w_{x+1} + w_{x+2} + w_{x+3})$$

dargestellt wird, dann bedeutet das Ausgleichsergebnis die Umhüllungslinie, welche man erhält, wenn man den durch die Teilung der Beobachtungswerte in bestimmte Bereiche resultierenden Ausgleichsprozeß durch Verschiebung der Bereiche um je einen Beobachtungswert so oft wiederholt, als in jedem Beobachtungsbereiche Beobachtungswerte vorhanden sind.

An der Hand dieser Deutungsweise ist es möglich, die mechanischen Ausgleichsformeln noch nach anderweitigen Gesichtspunkten zu interpretieren und dementsprechend auch auszugestalten.

§ 60. Die mechanischen Formeln als Spezialfälle des dritten Falles der Ausgleichung. 1. Die Mittelbildung der mechanischen Ausgleichsmethoden ist nur eine näherungsweise Verwendung der Methode der kleinsten Quadrate. Einerseits kommt die Abgrenzung eines bestimmtes Bereiches und die Beschränkung auf jene Parabeln, welche sich in diesem nach einem bestimmten Prinzipe mit Hilfe äquidistanter Punkte bilden lassen, einer gewissen Aufteilung der Gewichte über die verschiedenen Beobachtungspunkte je nach ihrer Stellung zum Mittelwerte gleich: jenen Beobachtungspunkten nämlich, welche bei der Bildung von Parabeln öfter mitwirken, wird offenbar auch ein höheres Gewicht zuerkannt. *Daraus folgt zunächst, daß im mechanischen Ausgleichsprozesse an die Stelle der beobachteten willkürliche Gewichte treten.* Andererseits wird bei der mechanischen Ausgleichung die Anzahl der zur Mittelbildung herangezogenen Kurven auf wenige eingeschränkt, während bei der Methode der kleinsten Quadrate immer unendlich viele Kurven in den Vergleich zur besten Kurve eintreten.

In der Wollhouseschen Formel wird beispielsweise der Beobachtung in den 5 Scheitelwerten der benützten Parabeln etwa ein Gewicht 5 zugedacht, weil an der Bestimmung der in diesen Punkten geltenden Mittelwerte alle 5 Parabeln teilnehmen, während den Nachbarwerten, je nach den Abständen vom Mittelwerte, nur die Gewichte 4, 3, 2, 1 zukommen. Streng genommen müßte aber die auf solcher Basis entwickelte Methode nicht zur einfachen Mittelbildung, sondern zur Form:

$$y = \begin{vmatrix} [wp] & [px] & [px^2] \\ [wpx] & [px^2] & [px^3] \\ [wpx^2] & [px^3] & [px^4] \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} [p] & [px] & [px^2] \\ [px] & [px^2] & [px^3] \\ [px^2] & [px^3] & [px^4] \end{vmatrix}$$

führen, worin $p_0 = p_{\pm 1} = p_{\pm 2} = p_{\pm 3} = 5$; $p_{\pm 4} = 4$; $p_{\pm 5} = 3$; $p_{\pm 6} = 2$; $p_{\pm 7} = 1$ gleichkommt. Wird in dieser Formel noch für $[px^k] = \alpha_k$ geschrieben und bemerkt, daß $[px^{2i+1}] = 0$, so erhält man als Ausgleichsfunktion

$$y = \frac{[wp] - [wp^2x] \frac{\alpha_2}{\alpha_4}}{\alpha_0 - \frac{\alpha_2^2}{\alpha_4}}. \qquad \text{(XXVIII)}$$

Die Ausführung der angedeuteten Operation ergibt:

$$\alpha_0 = 55,\ \alpha_2 = 660,\ \alpha_4 = 16764$$

$$y = \frac{[wp] - 0{,}03938\,[wpx^2]}{29{,}015}$$

$$\begin{aligned} y = {} & 0{,}1723\,w_0 + 0{,}1654(w_1 + w_{-1}) + 0{,}1451(w_2 + w_{-2}) \\ & + 0{,}1112\,(w_3 + w_{-3}) + 0{,}0510(w_4 + w_{-4}) + 0{,}0016(w_5 + w_{-5}) \\ & - 0{,}0287\,(w_6 + w_{-6}) - 0{,}0320(w_7 + w_{-7}). \qquad \text{(XXVIII}_1\text{)} \end{aligned}$$

In der Karupschen Formel versucht man durch 20 beobachtete Punkte und die rechnungsmäßigen Werte der Erscheinung, welche sich aus diesen durch Interpolation mit Hilfe von oskulierenden Parabeln 3. Ordnung erzeugen, die beste resultierende Kurve zu gewinnen. Die Oskulation erfolgt im Mittelwerte der Parabel, welche im übrigen nur durch einen um 5 Punkte entfernten Punkt hindurchzugehen hat. Die Bedingung der Oskulation erscheint vom Standpunkt der Bildung der Ausgleichskurve gleichfalls nur als Erhöhung des Gewichtes. Mit Rücksicht darauf wird man demnach der Beobachtung im Werte 0 bis ± 4 ein Gewicht 6, nämlich das Gewicht 2 der Eigenbeobachtung und das Gewicht 4 der hindurchgehenden vier rechnungsmäßigen Werte; ebenso den um 1 Intervall von den Grenzwerten dieser Strecke entfernten Werten der Erscheinung die Gewichte 5; den um 2 Intervalle entfernten Werten die Gewichte 4 usf., den um 5 Intervalle entfernten Werten die Gewichte 1 beizulegen haben. Die Ausgleichskurve ergibt somit für den Mittelwert

$$y = \begin{matrix} [wp] & [px] & [px^2] & [px^3] \\ [wpx] & [px^2] & [px^3] & [px^4] \\ [wpx^2] & [px^3] & [px^4] & [px^5] \\ [wpx^3] & [px^4] & [px^5] & [px^6] \end{matrix} : \begin{matrix} [p] & [px] & [px^2] & [px^3] \\ [px] & [px^2] & [px^3] & [px^4] \\ [px^2] & [px^3] & [px^4] & [px^5] \\ [px^3] & [px^4] & [px^5] & [px^6] \end{matrix}$$

Wenn man aber zur Erhöhung des Gefälles statt der obigen Gewichte p die Gewichte nur im Punkte Null $= 6$, in den Punkten $\pm 1 = 5$ usw., endlich in den Punkten 5 bis 9 der Einheit gleichsetzt, so wird $[px] = [px^3] = [px^5] = 0$; $[p] = 44$. Für $[px^2] = \alpha_2$, $[px^4] = \alpha_4$ und $[px^6] = \alpha_6$ ergibt sich hieraus ganz in Analogie der für Wollhousens Formel durchgeführten Entwickelungen

$$y = \frac{[wp] - \frac{\alpha_2}{\alpha_4}[wpx^2]}{44 - \frac{\alpha_2^2}{\alpha_4}}.$$

Für $\alpha_2 = 670$ und $\alpha_4 = 31606$ reduziert sich die Formel auf

$$y = \frac{[wp] - 0{,}021198[wpx^2]}{29{,}797} \qquad \text{(XXIX)}$$

Als schließliche Ausgleichsformel findet man:

$$\begin{aligned} y_x = {} & 0{,}2013\, w_x + 0{,}1642(w_{x+1} + w_{x-1}) + 0{,}1229(w_{x+2} + w_{x-2}) \\ & + 0{,}0815(w_{x+3} + w_{x-3}) + 0{,}0444(w_{x+4} + w_{x-4}) \\ & + 0{,}0158(w_{x+5} + w_{x-5}) + 0{,}0080(w_{x+6} + w_{x-6}) \\ & - 0{,}0013(w_{x+7} + w_{x-7}) - 0{,}0119(w_{x+8} + w_{x-8}) \\ & - 0{,}0241(w_{x+9} + w_{x-9}) \end{aligned} \qquad \text{(XXIX}_1\text{)}$$

Welche Korrekturen durch derartige Änderungen in der Darstellungsweise der mechanischen Ausgleichskurven erzielt werden, ist aus dem nachstehenden Vergleiche zwischen Wollhousens originärer und abgeänderter Formel zu entnehmen:

	Wollhousens Ausgleichung			Abgeänderte Formel		
Alter	Wahrscheinlichkeit	1. Differenz	2. Differenz	Wahrscheinlichkeit	1. Differenz	2. Differenz
35	0,00877			0,00882		
36	0,00911	34		0,00916	34	
37	0,00946	35	1	0,00945	29	— 5
38	0,00978	32	— 3	0,00972	27	— 2
39	0,01008	30	— 2	0,00998	26	— 1
40	0,01031	23	— 7	0,01023	25	— 1
41	0,01049	18	— 5	0,01052	29	4
42	0,01073	24	6	0,01082	30	1
43	0,01113	40	16	0,01113	31	1
44	0,01156	43	3	0,01157	44	13
45	0,01219	63	20	0,01217	60	16
46	0,01294	75	12	0,01294	77	17
47	0,01370	76	1	0,01375	81	4
48	0,01444	74	— 2	0,01440	65	— 16
49	0,01522	78	4	0,01506	66	1
50	0,01595	73	— 5	0,01580	74	8
51	0,01667	72	— 1	0,01665	85	11
52	0,01755	88	16	0,01772	107	22

Inwieweit durch solche Formeln die Anlehnung an das theoretische Minimalgefälle bewirkt wird, läßt sich der folgenden Zahlenreihe entnehmen:

Verhältniszahl bei Abänderung der Formel von	Abstand vom Maximum 1	2	3	4	5	6
Wollhouse	0,954	0,838	0,642	0,294	0,009	0,166
Karup	0,814	0,610	0,405	0,220	0,078	0,040

2. Durch eine derartige Ausgestaltung der Theorie wird eine nach der Theorie der Fehlerquadrate einwandfreie Bestimmung der für jeden Ausgleichsbereich besten Kurve ermöglicht. Nicht eliminiert erscheint jedoch der Fehler, welcher in die Resultate dadurch gebracht wird, daß man sich lediglich der Umhüllungslinie der für die Ausgleichsbereiche erhaltenen Kurven bedient. Unmittelbar einleuchtend ist diesbetreffend, daß durch diesen letzteren Prozeß nur dann keine Verschlechterung in die Ausgleichsergebnisse getragen wird, wenn die für die Ausgleichung jedes einzelnen Bereiches herangezogene Kurve das gesuchte Kurvengesetz selbst ist.

Dieser Forderung entspricht nahezu die Gompertz-Makehamsche Funktion (für die Absterbeordnung) und es könnte daher die Frage aufgeworfen werden, wie sich die Ausgleichsfunktion unter ihrer Verwendung gestaltet.

Die aus ihr resultierende Formel erweist sich aber als überaus kompliziert.

Wenn man jedoch von bestimmten Formen der Ausgleichskurven absieht, dann wird offenbar der durch die Bildung der Umhüllungslinie *selbst* in die Rechnung getragene Fehler dann ein kleinster sein, wenn die Zahl der zur Ausgleichung herangezogenen Punkte die Konstanten der Kurve nur um eine Einheit überschreitet. *Eine solche Ausgleichskurve soll eine Kurve kleinsten Zwanges* genannt werden. Man kann deren Gleichung leicht ableiten.

Die Ausgleichsgleichung lautet im allgemeinen:

$$p_1(y_1 - w_1)\,\delta y_1 + p_2(y_2 - w_2)\,\delta y_2 + \cdots + p_n(y_n - w_n)\,\delta y_n = 0.$$

Für die Ausgleichskurve kleinsten Zwanges muß aber eine Beziehung unter den $n\,y$, etwa $\varphi(y_1, y_2, \cdots y_n) = 0$, bestehen. Wird die daraus folgende Variation

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}\,\delta y_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y_2}\,\delta y_2 \cdots \qquad + \frac{\partial \varphi}{\partial y_n}\,\delta y_n = 0$$

mit der obigen Gleichung verglichen, so resultiert für λ als einen konstanten Faktor ganz allgemein

$$p_i(y_i - w_i) = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \quad \text{oder} \quad y_i = w_i + \frac{\lambda}{p_i}\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}.$$

Der Faktor λ läßt sich durch Substitution der y Werte in die Beziehungsgleichung $\varphi(y_1, y_2, \ldots y_n) = 0$ berechnen. Man erhält für ihn

$$\varphi\left(w_1 + \frac{\lambda}{p_1}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1},\ w_2 + \frac{\lambda}{p_2}\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}, \cdots w_n + \frac{\lambda}{p_n}\frac{\partial\varphi}{\partial y_n}\right) = 0.$$

Nimmt man nun an, daß man bei der Entwickelung der linken Seite der Gleichung nach $\frac{\lambda}{p_i}\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}$ sich stets mit den ersten Gliedern begnügen kann, dann erhält man für

$$\lambda = -\frac{\varphi(w_1, w_2, \cdots, w_n)}{\left[\frac{1}{p}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)^2\right]}$$

und daher allgemein für

$$y_i = w_i - \frac{\varphi(w_1, w_2, \cdots, w_n)}{\left[\frac{1}{p}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)^2\right]}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}\right)_w. \qquad \text{(XXX)}$$

In dem sehr allgemeinen Fall, daß

$$y_1 f_1 + y_2 f_2 + \cdots + y_n f_n = 0,$$

wenn $f_1, f_2, f_3 \ldots f_n$ Funktionen von x sind, hat man

$$y_i = w_i - \frac{[wf]}{\left[\frac{1}{p}f^2\right]} f_i.$$

Um zum Beispiel die Gerade kleinsten Zwanges zu erhalten, wird man die beiden Gleichungen

$$y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2) = 0$$

und

$$p_1(y_1 - w_1)\,\delta y_1 + p_2(y_2 - w_2)\,\delta y_2 + p_3(y_3 - w_3)\,\delta y_3 = 0$$

zu identifizieren haben, woraus sich sofort die drei Grundgleichungen

$$y_1 = w_1 + \frac{\lambda}{p_1}(x_2 - x_3);\ y_2 = w_2 + \frac{\lambda}{p_2}(x_3 - x_1);\ y_3 = w_3 + \frac{\lambda}{p_3}(x_1 - x_2)$$

und für

$$p_1 = p_2 = p_3 \quad \text{und} \quad x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = 1$$

die folgenden Beziehungen entwickeln

$$\lambda = \frac{w_1 - 2w_2 - w_3}{6};\ y_1 = \frac{5w_1 + 2w_2 - w_3}{6};\ y_2 = \frac{w_1 + w_2 + w_3}{3};$$

$$y_3 = \frac{5w_3 + 2w_2 - w_1}{6}.$$

Analog hat man für die Parabel zweiter Ordnung und kleinsten Zwanges die Gleichungen

$$y_1 [x_2 x_3 (x_3 - x_2) + x_4 (x_2^2 - x_3^2) + x_4^2 (x_3 - x_2)] + y_2 [x_1 x_3 (x_1 - x_3) + x_4 (x_3^2 - x_1^2) + x_4^2 (x_1 - x_3)] + y_3 [x_1 x_2 (x_2 - x_1) + x_4 (x_1^2 - x_2^2) + x_4^2 (x_2 - x_1)]$$
$$- y_4 [x_2 x_3 (x_3 - x_2) + x_1 x_3 (x_1 - x_3) + x_1 x_2 (x_2 - x_1)] = 0$$

und

$$p_1 (y_1 - w_1) \delta y_1 + p_2 (y_2 - w_2) \delta y_2 + p_3 (y_3 - w_3) \delta y_3 + p_4 (y_4 - w_4) \delta y_4 = 0$$

zu identifizieren.

Hieraus ergibt sich für $p_1 = p_2 = p_3 = p_4$ und $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3$

$$\lambda = -\frac{w_1 - 3 w_2 + 3 w_3 - w_4}{20}$$

und für

$$y_1 = w_1 + 2\lambda = \frac{9 w_1 + 3 w_2 - 3 w_3 + w_4}{10},$$

$$y_2 = w_2 - 6\lambda = \frac{3 w_1 + w_2 + 9 w_3 - 3 w_4}{10},$$

$$y_3 = w_3 + 6\lambda = \frac{-3 w_1 + 9 w_2 + w_3 + 3 w_4}{10},$$

$$y_4 = w_4 - 2\lambda = \frac{w_1 - 3 w_2 + 3 w_3 + 9 w_4}{10}.$$

Symmetrische Formeln erhält man für die mittleren Abszissen und die Parabeln ungerader Ordnung. Für die Parabeln 3. Ordnung wird der ausgeglichene Wert der mittleren Abszisse (Vgl. Seite 227):

$$y_3 = \tfrac{1}{35} (-3 w_1 + 12 w_2 + 17 w_3 + 12 w_4 - 3 w_5),$$

für die Parabel 5. Ordnung

$$y_4 = \tfrac{1}{231} (5 w_1 - 30 w_2 + 75 w_3 + 131 w_4 + 75 w_5 - 30 w_6 + 5 w_7).$$

§ 61. Der vierte Fall der Ausgleichung. Der vierte Fall der Ausgleichung führt so wenig wie der dritte Fall zu wesentlich neuen Methoden, weil er prinzipiell von dem zweiten nicht unterschieden ist. In welch mannigfacher Art das Grundprinzip des Falles zur Ausgestaltung eines Ausgleichsverfahrens verwendet werden kann, mag an dem folgenden Beispiele nachgewiesen werden.

Weil alle Ausgleichung Beeinflussung irgend eines beobachteten Wertes durch die Beobachtungen in den Nachbarwerten ist und gemäß den allgemeinen Ergebnissen des zweiten Falles der Ausgleichung gleich weit vom ersteren Werte abstehende Werte diesen gleichmäßig beeinflussen müssen, so kann man die Ausgleichsformel, welche die Abhängigkeit des unmittelbar vorausgehenden und folgenden Wertes allein in Rechnung zieht, allgemein schreiben:

$$y_x = w_x + \lambda \Delta^2 w_{x-1}. \qquad \text{(XXXI)}$$

λ wird aber zweckmäßig so bestimmt werden, daß die Gesamtkrümmungen der Kurve ein Minimum ergeben. Nachdem nun die Größe der Krümmung in jedem Werte der ausgeglichenen Kurve durch $\Delta^2 y_{x-1}$ gemessen werden kann, so wird man die Bedingung

$$\sum(\Delta^2 y_{x-1})^2 = \sum(\Delta^2 w_{x-1} + \lambda \Delta^1 w_{x-2})^2 = \text{Minimum}$$

zu erfüllen haben.

Hieraus erhält man zunächst

$$\sum(\Delta^2 w_{x-1} + \lambda \Delta^1 w_{x-2})\, \Delta^1 w_{x-2} = 0$$

und für

$$\lambda = -\frac{[\Delta^2 w_{x-1}\, \Delta^1 w_{x-2}]}{[\Delta^1 w_{x-2}\, \Delta^1 w_{x-2}]}, \qquad \text{(XXXII)}$$

die Summen zu nehmen über den ganzen Bereich der auszugleichenden Punkte.

Der Verfasser hat diese Formel zu einer Methode ausgestaltet, indem er mit dem auf solche Art bestimmten λ zunächst eine Wertereihe (die unausgeglichene Tafel M I der 23 deutschen Gesellschaften) transformierte und die Quadratsumme der Fehler ermittelte; auf die transformierte Reihe das Verfahren nochmals anwandte und sich mittels der Quadratsumme der kleinsten Fehlerquadrate überzeugte, ob die neue Reihe eine Verbesserung erfahren habe u. s. f.

Die fünfmalige Anwendung des Verfahrens führte endlich auf eine der Verbesserung durch dieselbe Methode nicht mehr fähige Wertereihe mit ziemlich regelmäßigen und sich an die bekannte Zillmersche Tafel eng anschließenden Sterbenswahrscheinlichkeiten (Die Methoden der Ausgleichung von Massenerscheinungen).

Die Ausgleichung der Sterbetafel M I der 23 deutschen Gesellschaften.

Alter	Unausgeglichene 1000fache Wahrscheinlichkeiten	Ausgleichung nach				
		1maliger	2maliger	3maliger	4maliger	5maliger
		Wiederholung des Verfahrens				
25	7,09	6,60	6,62	6,52	6,59	6,57
26	6,45	6,89	6,77	6,78	6,73	6,77
27	7,29	6,82	6,93	6,91	6,85	6,93
28	6,57	7,09	7,05	7,14	7,12	7,17
29	7,58	7,22	7,32	7,33	7,39	7,39
30	7,38	7,64	7,61	7,67	7,66	7,68
31	8,07	8,04	8,01	7,99	7,97	7,99
32	8,41	8,45	8,38	8,36	8,33	8,32
33	8,87	8,73	8,71	8,66	8,67	8,66
34	8,85	8,94	8,95	8,88	8,99	8,88
35	9,14	9,19	9,24	9,33	9,34	9,36
36	8,61	9,59	9,68	9,71	9,74	9,74
37	10,00	10,26	10,18	10,16	10,15	10,17
38	11,24	10,69	10,64	10,58	10,61	10,61
39	10,65	10,95	10,99	11,07	11,08	11,12

Alter	Unausgeglichene 1000fache Wahrscheinlichkeiten	Ausgleichung nach 1maliger	2maliger	3maliger	4maliger	5maliger
		Wiederholung des Verfahrens				
40	11,06	11,35	11,47	11,58	11,63	11,67
41	12,45	12,10	12,14	12,22	12,26	12,29
42	12,66	12,96	12,94	12,96	12,96	12,96
43	13,88	13,77	13,77	13,69	13,67	13,64
44	14,73	14,59	14,47	14,37	14,31	14,28
45	15,11	15,04	15,00	14,90	14,89	14,88
46	15,26	15,37	15,35	15,41	15,44	15,48
47	15,77	15,63	15,81	15,98	16,08	16,15
48	15,83	16,41	16,57	16,78	16,87	16,97
49	17,83	17,67	17,70	17,79	17,86	17,96
50	19,29	19,03	18,99	18,88	19,06	19,11
51	19,88	20,26	20,27	20,36	20,37	20,43
52	21,75	21,52	21,70	21,76	21,81	21,82
53	22,85	23,30	23,23	23,29	23,28	23,31
54	25,46	24,87	24,86	24,79	24,88	24,89
55	26,09	26,41	26,37	26,50	26,50	26,61
56	27,78	27,81	28,10	28,20	28,34	28,37
57	29,59	30,09	30,—	30,23	30,24	30,39
58	33,05	32,11	32,30	32,29	32,45	32,45
59	33,37	34,68	34,58	34,72	34,67	34,77
60	38,06	36,96	37,10	37,02	37,09	37,05
61	39,08	39,64	39,48	39,49	39,43	39,48
62	41,98	41,86	41,88	41,82	41,88	41,76
63	44,48	44,15	44,17	44,29	44,50	44,69
64	45,89	46,51	46,66	47,25	47,50	47,81

§ 62. Die Ausgleichung in der Fläche. Es kommt oft vor, daß die Wahrscheinlichkeiten in ihrer Abhängigkeit von mehreren unabhängig Veränderlichen (die Sterbenswahrscheinlichkeiten beispielsweise in ihrer Abhängigkeit vom Alter und der Vertragsdauer) zur Beobachtung und Darstellung gelangen. In solchem Falle wird die Ausgleichung der beobachteten Werte rücksichtlich aller unabhängig Variablen, also so vorzunehmen sein, daß Stetigkeitssprünge vermieden werden, in welcher Richtung (nach welcher Veränderlichen) auch die Veränderungen der beobachteten Werte verfolgt werden sollen.

Nachdem für die Abhängigkeit von mehreren Veränderlichen in der Regel alle plausiblen Annahmen über Gesetzmäßigkeiten fehlen, welche für die ganze Erscheinung giltig sein könnten, so wird man sich mit Vorteil solcher Annahmen bedienen, welche für enge Bereiche der auszugleichenden Wahrscheinlichkeiten wahrscheinlich sind. Auf diesen Fall sind aber die bisherigen Ableitungen unmittelbar anwendbar. Hängt, um diese Behauptung an einem Beispiele zu erweisen, eine Wahrscheinlichkeit $w_{x,y}$ von zwei unabhängig Veränderlichen mit diesen derart zusammen, daß in engem Bereiche die Identifizierung mit einer Linearfunktion möglich ist, so wird man die be-

obachteten Werte derart in die auszugleichenden $Z_{x,y} = ax + by + c$ umzubilden haben, daß

$$[p(ax + by + c - w)^2] = \text{Minimum},$$

woraus wieder unmittelbar das Gleichungssystem folgt:

$$\begin{aligned} a[px^2] + b[pxy] + c[xp] &= [wxp], \\ a[pxy] + b[py^2] + c[yp] &= [wyp], \\ a[px] + b[py] + c[p] &= [wp]. \end{aligned}$$

Wird in Analogie der bisherigen Behandlungsweise des Problems $p_1 = p_2 = p_3 = \pm 1$ gesetzt und der Koordinatenanfangspunkt in die Mitte des Ausgleichsbereichs, also derart verlegt, daß $[x] = [y] = 0$ und $[p] = 2m + 2n + 1$, so erhält man für die Konstanten die Werte

$$a = \frac{[wx][y^2] - [wy][xy]}{[x^2][y^2] - [xy]^2},$$

$$b = \frac{[wy][x^2] - [wx][xy]}{[x^2][y^2] - [xy]^2},$$

$$c = \frac{[w]}{2m + 2n + 1}.$$

Wenn endlich statt der ausgeglichenen Werte die Umhüllungslinie der Ausgleichung genommen wird, dann ist

$$z_0 = \frac{w_0 + (w_{+1} + w_{-1}) + (w_{+2} + w_{-2}) + \cdots + (w_{+m} + w_{-m}) + (\overline{w}_{+1} + \overline{w}_{-1}) + (\overline{w}_{+2} + \overline{w}_{-2} + \cdots + \overline{w}_{+n} + \overline{w}_{-n})}{2m + 2n + 1},$$

worin $w_1, w_2, \cdots w_m$ die beobachteten Werte nach den Änderungen der einen, $\overline{w}_1, \overline{w}_2 \cdots \overline{w}_n$ die beobachteten Werte nach den Änderungen der andern unabhängig Veränderlichen bedeuten.

In analoger Art kann man eine Fläche zweiter Ordnung der Form $z = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{12}xy + a_1x + a_2y + a_0$ zu bestimmen trachten, welche durch die Beobachtung im Koordinatenanfangspunkte und in n benachbarten vorausgehenden und ebenso vielen folgenden Werten der Abszissenachse, ferner in m benachbarten vorausgehenden und ebenso vielen folgenden Werten der Ordinatenachse bestimmt wird. Sieht man wieder von den Gewichten ab, dann erhält man zur Bestimmung der Konstanten:

$$\begin{aligned} &a_{11}[x^4] + a_{22}[x^2y^2] + a_0[x^2] = [wx^2], \\ &a_{11}[x^2y^2] + a_{22}[y^4] + a_0[y^2] = [wy^2], \\ &a_{11}[x^2] + a_{22}[y^2] + a_0(2n + 2m + 1) = [w], \\ &a_{12}[x^2y^2] = [wxy]; \quad a_1[x^2] = [wx]; \quad a_2[y^2] = [wy]. \end{aligned}$$

Die Beobachtung im Koordinatenanfangspunkte ergibt $z = a_0$ oder

$$z = \begin{vmatrix} [x^4] & [x^2y^2] & [xw^2] \\ [x^2y^2] & [y^4] & [wy^2] \\ [x^2] & [y^2] & [w] \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} [x^4] & [x^2y^2] & [x^2] \\ [x^2y^2] & [y^4] & [y^2] \\ [x^2] & [y^2] & (2n+2m+1) \end{vmatrix}$$

$$= \left\{ -[wx^2] \begin{vmatrix} [x^2y^2] & [y^4] \\ [x^2] & [y^2] \end{vmatrix} + [wy^2] \begin{vmatrix} [x^4] & [x^2y^2] \\ [x^2] & [y^2] \end{vmatrix} \right. \qquad \text{(XXXIII)}$$

$$\left. - [w] \begin{vmatrix} [x^4] & [x^2y^2] \\ [x^2y^2] & [y^4] \end{vmatrix} \right\} : \begin{vmatrix} [x^4] & [x^2y^2] & [x^2] \\ [x^2y^2] & [y^4] & [y^2] \\ [x^2] & [y^2] & (2m+2n+1) \end{vmatrix}.$$

Wird beispielsweise angenommen, daß $m = n = 2$ ist, so erhält man zunächst

$$[x^2] = [y^2] = 10: \quad [x^4] = [y^4] = 34; \quad [x^2y^2] = 100$$

und

$$503z = 5[wx^2] + 5[wy^2] - 67[w].$$

In den Zeichen der früheren Ausgleichsbedingung resultiert

$$503z = 67w_0 + 62(w_1 + w_{-1} + \overline{w}_1 + \overline{w}_{-1}) + 47(w_2 + w_{-2} + \overline{w}_2 + \overline{w}_{-2})$$

oder endlich:

$$z = 0{,}1332w_0 + 0{,}1233(w_1 + w_{-1} + \overline{w}_1 + \overline{w}_{-1}) + 0{,}0934(w_2 + w_{-2} + \overline{w}_2 + \overline{w}_{-2}).$$

Um die Theorie an einem Beispiele zu erläutern, soll die Ausgleichung von Invaliditätswahrscheinlichkeiten vorgenommen werden, welche in ihrer Abhängigkeit vom Alter und der Berufsdauer beobachtet sind. Es hat sich ergeben für das Dienerpersonal der k. k. priv. Kaiser Ferdinands-Nordbahn in Wien als 100fache Invaliditätswahrscheinlichkeit (unausgeglichen[1])

Beobachtungsalter	Dienstzeit 3—7,	8—12,	13—17,	18—22,	23—27,	28—32,	33—37
35	0,036	0,493	0,777				
40	0,060	0,531	0,777				
45	0,063	0,420	0,595	1,193	2,746		
50	0,365	0,994	1,259	1,024	2,553	2,051	
55	—	0,508	2,103	1,286	2,359	3,687	2,469
60	—	—	0,646	2,743	4,944	4,813	8,646
65	—	—	—	—	11,449	9,829	18,201
70	—	—	—	—	44,444	27,304	27,313
75	—	—	—	—	—	34,483	48,276

Durch Anwendung der Ausgleichsformel

$$u_{x,y} = \tfrac{1}{5}(w_{x,y} + w_{x+1,y} + w_{x-1,y} + w_{x,y+1} + w_{x,y-1})$$

1) Der Verfasser, die Abhängigkeit der Invaliditätswahrscheinlichkeiten der Angestellten von der Berufsdauer (Wien 1905).

erhält man schließlich

Beobachtungsalter	Dienstalter 3—7,	8—12,	13—17,	18—22,	23—27,	28—32,	33—37,	38—42
35	0,196	0,459	0,682					
40	0,173	0,456	0,670					
45	0,227	0,521	0,849	1,390	2,164			
50	0,474	0,709	1,195	1,463	2,147	2,764		
55	—	1,202	1,160	1,903	2,966	3,076	4,934	
60	—	—	1,832	2,405	5,262	6,384	8,532	
65	—	—	—	—	13,667	14,319	16,063	22,176
70	—	—	—	- -	27,732	27,223	27,860	26,834

§ 63. Die graphische Methode der Ausgleichung. Die graphische Methode besteht allgemein darin, daß die Werte der Erscheinung nach einem irgendwie geteilten Maßstab auf den durch die Kombination der Ursachen definierten geometrischen Orten aufgetragen werden und das hierdurch erhaltene geometrische Gebilde (die Kurve, die Fläche) durch ein anderes Gebilde ersetzt wird, welches sich dem ersteren möglichst anschmiegt und hierbei gewisse charakteristische Merkmale besitzt. Die letzteren können als Anwendung der Erfahrung des jeweiligen Ausgleichers auf einen speziellen Fall angesehen werden. Je nachdem sie die ganze Kurve oder bloß einen Teil umfassen, wird die graphische Methode unter den 2. oder 4. Fall der Ausgleichung einzureihen sein. Damit die große Unbestimmtheit des Verfahrens einigermaßen eine Begrenzung erfahre, sind von mehreren Ausgleichern gewisse Maßnahmen empfohlen worden.

1. Fischer schlägt vor, die Kurve in möglichst großem Maßstabe zu zeichnen und bei der Konstruktion der ausgeglichenen Kurve Schwunglineale zu verwenden; auch soll die Ausgleichung immer auf die Beeinflussung von 5 Nachbarwerten Bedacht nehmen.[1])

2. Nach Lazarus sollen in jedem Werte der unabhängig Veränderlichen, in welchem Beobachtungen angestellt wurden, nicht nur die wahrscheinlichsten Werte der beobachteten Wahrscheinlichkeiten, sondern auch die wahrscheinlichen Fehler, die letzteren als Fehlerzone verzeichnet werden. Die ausgeglichenen Werte sollen sich im großen ganzen in der Fehlerzone bewegen.[2])

3. Sprague fordert die Zusammenfassung der Beobachtungswerte in Gruppen gleicher Gewichte (d. h. in Gruppen mit gleichem Gesamtgewichte) und setzt für jede derselben eine gemeinsame Wahrscheinlichkeit, also einen gemeinsamen Wert der Durchschnittswahr-

1) Ph. Fischer, Grundzüge des auf die menschliche Sterblichkeit begründeten Versicherungswesens. Oppenheim 1859.

2) Lazarus, Berichte der mathem. Gesellschaft in Hamburg 1879.

scheinlichkeit der Einzelbeobachtungen fest. Die Durchschnittswahrscheinlichkeiten sollen zur Erfassung des allgemeinen Funktionscharakters der Erscheinung dienen, die Detailausgleichungen derart erfolgen, daß die zweiten Differenzen der ausgeglichenen Werte in größeren Abschnitten der Kurve dasselbe Zeichen tragen und die theoretische und beobachtete Anzahl von Toten innerhalb dieser Abschnitte gleich sind.[1])

4. Kaan hat ein und dieselbe Beobachtungsreihe von 7 verschiedenen Technikern behandeln lassen und die Quadratsumme der Abweichungen zwischen den ausgeglichenen und beobachteten Werten für jede Ausgleichsreihe, sowie diese Quadratsumme für das arithmetische Mittel aller 7 Beobachtungsreihen bilden lassen. Als beste Kurve sah er unter den konstruierten 8 Kurven jene an, für welche die Quadratsumme der Fehlerquadrate ein Minimum wurde.

5. Der Verfasser hat Beobachtungen über die Sterbenswahrscheinlichkeiten monatweise (also nach den durch Monate unterschiedenen Altern) angestellt und 12 benachbarte Werte immer zu je einem Mittelwerte vereinigt, um einerseits eine gewisse Ausgleichung in den ursprünglichen Beobachtungen selbst zu erhalten und andererseits die Maxima und Minima leicht überblicken zu können.[2])

§ 64. Kriterien zur Beurteilung der besten Ausgleichung. Zur Vergleichung der nach verschiedenen Methoden gewonnenen Resultate dienen: Die Summen der kleinsten Fehlerquadrate der beobachteten und ausgeglichenen Werte, die Unterschiede zwischen den nach der ausgeglichenen Tafel an der Hand der Beobachtungen erwarteten und den wirklichen Toten (allgemein zwischen den erwarteten und wirklichen Ereigniszahlen), die Anzahl der durch die Ausgleichung an dem beobachteten Gesetze nicht veränderten Differenzen, endlich das Maß der Unregelmäßigkeiten in der ausgeglichenen Kurve.

Über diese Kriterien ist im einzelnen das Folgende hervorzuheben:

1. Die Summe der Fehlerquadrate gibt nur dann ein brauchbares Kriterium, wenn die Resultate auf gleicher Grundlage (beispielsweise immer nach einer Gompertz-Formel, oder immer nach mechanischen Formeln) aber nach verschiedener Näherungsmethode gewonnen werden.

---

1) Sprague, The graphic method of adjusting mortality tables. Journal of the Inst. of Act. Vol. 26.

2) Anhang zur Jubiläumsdenkschrift des österreichischen Beamtenvereins. Wien 1890.

Beispielsweise ist die 10^{10}fache Quadratsumme der Fehlerquadrate im Stücke der Absterbeordnung der 20 englischen Gesellschaften zwischen den Altern 35 und 52 nach der Wollhouseschen Methode 31,337, nach der Korrektur auf Seite 242: 37,658.

Es hat aber keinen Sinn, zwei nach verschiedenen Prinzipien gewonnene Resultate insbesondere dann zu vergleichen, wenn aus anderweitigen Erfahrungen der Vorzug der zugrunde liegenden Methode von vornherein feststände. Würde beispielsweise der Gompertz-Makehamschen Formel aus physiologischen Gründen der denkbar größte Grad der Wahrscheinlichkeit zukommen, dann müßte jedes andere Ergebnis mit kleinerer Quadratsumme der Fehlerquadrate zurückstehen; zu kleineren Quadratsummen würde ja jeder beliebige Kurvenzug führen, welcher sich zwischen den beobachteten und den nach der Gompertzformel ausgeglichenen Werten befände.

2. Der Unterschied zwischen den wahrscheinlichen und wirklichen Toten muß bei jeder brauchbaren Ausgleichsmethode an sich klein sein, weil dies im Wesen der Ausgleichsgleichung gelegen ist. Aber ein Kriterium für die beste Methode kann der Unterschied nicht abgeben. Um den ersteren Teil dieser Behauptung zu erweisen, braucht man bloß eine der 4 Formen der Ausgleichsgleichung ins Auge zu fassen. Bezeichnet t_i die wahrscheinliche, T_i die beobachtete Zahl der Toten im Beobachtungspunkte i und multipliziert man beispielsweise in der ersten Form der Ausgleichung das Gewicht mit dem Klammerausdruck, so erhält man

$$\sum_1^n \left(\frac{T_i}{y_i(1-y_i)} - \frac{t_i}{y_i(1-y_i)} \right) \delta y_i = 0.$$

Weil aber $y_i(1-y_i)$ an sich in der ganzen Absterbeordnung eine wenig variierende Größe darstellt, so kann man hierfür auch schreiben:

$$\sum_1^n (T_i - t_i) \delta y_i = 0.$$

Diese Gleichung wird nur dann streng erfüllt, wenn Punkt für Punkt $T_i - t_i = 0$. Sie wird näherungsweise zutreffen, wenn sie für bestimmte Strecken zutreffend erachtet werden kann.

Daß aber die erwähnte Bedingung kein Kriterium für den Vergleich der Methoden abgeben kann, erhellt schon daraus, daß sie die nicht ausgeglichene Kurve streng erfüllt und, wie im § 53: b bewiesen wurde, die ausgeglichenen Kurven, welches auch das angenommene Kurvengesetz ist, stets so bestimmt werden können, daß der erwähnten Bedingung genügt wird.

3. Die Ausgleichsmethoden haben den Zweck, lediglich die Beobachtungsfehler zu eliminieren, sollen aber die Form des Gesetzes selbst unberührt lassen. Diesem Grundsatze können die mechanischen Ausgleichskurven nicht entsprechen. Die letzteren lassen sich nämlich als ganze symmetrische Funktionen der Beobachtungen immer durch Differenzreihen mit Differenzen gerader Ordnung ausdrücken und müßten — sofern sie auf vollständig regelmäßige, d. h. von Beobachtungsfehlern nicht entstellte Funktionen, etwa auf Kurven zweiter oder höherer Ordnung angewendet werden — diese selbst auf die Gleichung $y_x = w_x$ überführen. In diesem Falle wäre aber die Ausgleichsgleichung eine Wurzel der Erscheinungsfunktion, welch letztere stets unbekannt ist.

Die Art der Änderungen, welche die Funktion selbst erfährt, werden unter der Annahme, daß die laufenden Differenzen mit der Ordnung rasch abnehmen, durch das Zeichen der ersten nicht verschwindenden Differenz charakterisiert. Hierüber lassen sich aber ganz allgemeine Regeln aufstellen. Weil nämlich in zur Abszisse konkaven Kurven die geraden Differenzen stets positiv, in konvexen Kurven stets negativ bleiben, so folgt für konkave Kurven, daß dieselben im Falle positiven Zeichens der ersten nicht verschwindenden Differenz noch konkaver, im Falle negativer Zeichen jedoch verflacht werden; für konvexe Kurven resultiert das Umgekehrte. Die Änderungen an den Erscheinungsgesetzen aber müssen desto kleiner sein, je mehr Differenzen vom Anfange verschwinden bezw. je kleiner der Koeffizient der ersten nicht verschwindenden Differenz ist. Die Überführung der Ausgleichsfunktion auf Differenzen erfolgt zweckmäßig durch die Beziehung:

$$y_{x+i} + y_{x-i} = 2\left[y_x + \frac{i^2}{1\cdot 2}\Delta^2 y_{x-1} + \frac{i^2(i^2-1^2)}{4!}\Delta^4 y_{x-2} + \frac{i^2(i^2-1^2)(i^2-2^2)}{6!}\Delta^6 y_{x-3} + \cdots\right], \qquad \text{(XXXIV)}$$

als deren spezielle Fälle sich

$$\begin{aligned}
y_{x+1}+y_{x-1} &= 2y_x + \Delta^2 y_{x-1}\\
y_{x+2}+y_{x-2} &= 2y_x + 4\Delta^2 y_{x-1} + \Delta^4 y_{x-2}\\
y_{x+3}+y_{x-3} &= 2y_x + 9\Delta^2 y_{x-1} + 6\Delta^4 y_{x-2} + \Delta^6 y_{x-3}\\
y_{x+4}+y_{x-4} &= 2y_x + 16\Delta^2 y_{x-1} + 20\Delta^4 y_{x-2} + 8\Delta^6 y_{x-3} + \Delta^8 y_{x-4}\\
y_{x+5}+y_{x-5} &= 2y_x + 25\Delta^2 y_{x-1} + 50\Delta^4 y_{x-2} + 35\Delta^6 y_{x-3} + 10\Delta^8 y_{x-4} + \cdots\\
y_{x+6}+y_{x-6} &= 2y_x + 36\Delta^2 y_{x-1} + 105\Delta^4 y_{x-2} + 112\Delta^6 y_{x-3} + 54\Delta^8 y_{x-4} + \cdots\\
y_{x+7}+y_{x-7} &= 2y_x + 49\Delta^2 y_{x-1} + 196\Delta^4 y_{x-2} + 294\Delta^6 y_{x-3} + 210\Delta^8 y_{x-4} + \cdots\\
y_{x+8}+y_{x-8} &= 2y_x + 64\Delta^2 y_{x-1} + 336\Delta^4 y_{x-2} + 672\Delta^6 y_{x-3} + 660\Delta^8 y_{x-4} + \cdots\\
y_{x+9}+y_{x-9} &= 2y_x + 81\Delta^2 y_{x-1} + 540\Delta^4 y_{x-2} + 1386\Delta^6 y_{x-3} + 1782\Delta^8 y_{x-4} + \cdots
\end{aligned}$$

darstellen.

Bei der Anwendung dieser Formeln auf die wichtigsten mechanischen Ausgleichsformeln erhält man

1. Für Finlaisons (Wittsteins) erste Ausgleichung:

$$y_x = w_x + \Delta^2 w_{x-1} + \cdots$$

2. Für Finlaisons (Wittsteins) zweite Ausgleichung:

$$y_x = w_x + 2\Delta^2 w_{x-1} + \cdots$$

3. Für die Ausgleichsformeln auf S. 227

$$y_x = w_x - \frac{3}{35}\Delta^4 w_{x-2} + \cdots$$

bezw.

$$y_x = w_x - \frac{3}{7}\Delta^4 w_{x-2} + \cdots .$$

4. Für Filipowskis Ausgleichsformel:

$$y_x = w_x + \frac{1}{4}\Delta^2 w_{x-1}$$

5. Für Wollhousens Formel:

$$y_x = w_x - 5 \cdot 4\Delta^4 w_{x-2}$$

6. Für die abgeänderte Wollhousesche Formel:

$$y_x = w_x - 7 \cdot 4\Delta^4 w_{x-2}$$

7. Für die Karupsche Formel:

$$y_x = w_x - 7\Delta^4 w_{x-2}$$

8. Für die abgeänderte Karupsche Formel:

$$y_x = w_x - 9\Delta^4 w_{x-2}$$

9. Für Highams erste Ausgleichsformel:

$$y_x = w_x + 6\Delta^4 w_{x-2}$$

Nach den Bemerkungen auf S. 238ff. werden die von den Beobachtungsfehlern abhängigen Störungen in den höheren Differenzen immer größer. Das erwähnte Kriterium kann demnach immer nur als Maßstab der Nichtänderung des ursprünglichen Gesetzes, niemals aber als Maßstab für die Beseitigung der Störungen durch Beobachtungsfehler, welchem Zwecke gerade die Ausgleichsformeln dienen sollen, Beachtung finden.

4. Um einen Maßstab für die ausgleichende Wirkung eines Verfahrens zu erhalten, pflegt man die ersten und zweiten Differenzen der ausgeglichenen Reihe zu entwickeln. Weil nämlich alle in den statistischen Massenerscheinungen in Betracht kommenden Funktionen sich nur wenig mit dem Alter verändern, können die aus dem Funktionscharakter hervorgehenden Differenzen nur gering sein. Dagegen müssen, wie im § 60 erwiesen wurde, die Fehler durch den Bildungs-

prozeß der Differenzen immer mehr in Erscheinung treten, je höher die Ordnung der Differenzen ist. Das erwähnte Kriterium ist allgemein giltig. Es wurde auch wiederholt versucht, dasselbe zur Ausgleichung methodisch zu verwerten, so insbesondere von Wollhouse und Sprague. Im § 61 wird ein Verfahren entwickelt, nach welchem die Quadratsumme der zweiten Differenzen über alle Werte der Erscheinung ein Minimum sein müsse. Man kennt das Kriterium in der Literatur als *Ebnungskriterium von Wollhouse*.[1])

§ 65. Die Verbindung verschiedener Ausgleichsmethoden.

Überaus häufig wird zur Ausgleichung eine Kombination von mehreren Ausgleichsmethoden verwendet. Aus der Literatur sind insbesondere die nachstehenden Verbindungen der Methoden bemerkenswert. Fischer konstruiert zunächst nach der graphischen Methode aus einer gegebenen Erfahrungsreihe wahrscheinlichster Werte eine neue Kurve, welche sich der Erfahrungsreihe möglichst anzuschmiegen hat. Aus dieser Kurve wird eine zweite nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate unter der Annahme entwickelt, daß das Endergebnis eine der graphisch ermittelten, für gewisse Strecken parallele Kurve sein müsse.

Sind also $w_{a+1}, w_{a+2}, \cdots, w_{a+n}$ die in n Nachbarwerten der unabhängig Veränderlichen bestimmten wahrscheinlichsten Werte der Beobachtung, $w'_{a+1}, w'_{a+2}, \cdots, w'_{a+n}$ die auf graphische Art ermittelten und endlich $y_{a+1}, y_{a+2}, \cdots, y_{a+n}$ die ausgeglichenen Werte, dann besteht nach der Voraussetzung

$$\begin{aligned} y_{a+2} - y_{a+1} &= w'_{a+2} - w'_{a+1} \\ y_{a+3} - y_{a+1} &= w'_{a+3} - w'_{a+1} \\ &\vdots \\ y_{a+n} - y_{a+1} &= w'_{a+n} - w'_{a+1}. \end{aligned}$$

Sind ferner die Gewichte in den Beobachtungspunkten $p_{a+1}, p_{a+2}, \cdots, p_{a+n}$, dann muß erfüllt sein:

$$\sum_{a=1,\,2,\,\cdots,\,n} p_{a+i}(y_{a+i} - w_{a+i})^2 = \text{Minimum}$$

oder

$$\sum p_{a+i}(y_{a+1} + w'_{a+i} - w'_{a+1} - w_{a+i})^2 = \text{Minimum},$$

woraus für y_{a+1} folgt:

$$y_{a+1} = w'_{a+1} + \frac{[p_{a+i}(w'_{a+i} - w_{a+i})]}{[p_{a+i}]}.$$

1) Der Verfasser, Die Methoden der Ausgleichung von Massenerscheinungen, Wien 1893, S. 99ff.

Behm gleicht eine Wertereihe zunächst nach der Wittsteinschen (ein oder zweimal angewendeten) Methode aus und bildet aus diesem Ergebnis ein neues unter der Annahme, daß das Endresultat ein Multiplum der nach Wittsteins Methode ermittelten Resultate sein müsse. Sind wie vorher

$$w_{a+1},\ w_{a+2},\ \cdots,\ w_{a+n}$$

die beobachteten,

$$w'_{a+1},\ w'_{a+2},\ \cdots,\ w'_{a+n}$$

die Wittsteinschen, und

$$y_{a+1},\ y_{a+2},\ \cdots,\ y_{a+n}$$

die Endwerte des ganzen Ausgleichsprozesses, $p_{a-1},\ p_{a+2},\ \cdots\ p_{a+n}$ die Gewichte, endlich c der Faktor, welcher die Endwerte mit den Wittsteinschen verbindet, dann erhält man zu des letzteren Bestimmung die Bedingung

$$\sum(cw'_{a+k} - w_{a+k})^2 p_{a+k} = \text{Minimum}$$

und hieraus

$$c = \frac{[w'_{a+k} w_{a+k} p_{a+k}]}{[w'_{a+k} w'_{a+k} p_{a+k}]},$$

die Summen zu nehmen über alle Beobachtungswerte.

Kaan hat die nach einem komplizierten graphischen Ausgleichsprozesse (§ 63: 4) ermittelten Werte einer weiteren Ausgleichung mit Hilfe der Annahme unterzogen, daß die gesuchte Endkurve eine lineare Funktion der graphisch ausgeglichenen Kurve sei. Bei Festhaltung der bisherigen Bezeichnungsweise folgt für die Bestimmung der Konstanten der linearen Funktion:

$$\sum_{k=1,\ 2,\ \cdots,\ n}(a + bw'_{a+k} - w_{a+k})^2 p_{a+k} = \text{Minimum},$$

woraus sich für a und b ergeben:

$$\begin{aligned} a[p] \quad + b[pw'] \quad &= [pw] \\ a[pw'] + b[pw'w'] &= [pww']. \end{aligned}$$

Karups Methode besteht aus drei getrennten Operationen: einer vorläufigen (mechanischen) Ausgleichung der gegebenen Sterbenswahrscheinlichkeiten nach der von ihm gefundenen Formel, einer darauf folgenden Korrektur auf Grund der rechnungsmäßigen und wirklichen Sterbefälle und einer definitiven (gleichfalls mechanischen) Ausgleichung, wobei jedoch eine neue Funktion, der Logarithmus der Sterbenswahrscheinlichkeiten, zugrunde gelegt wird.

Anhang I.

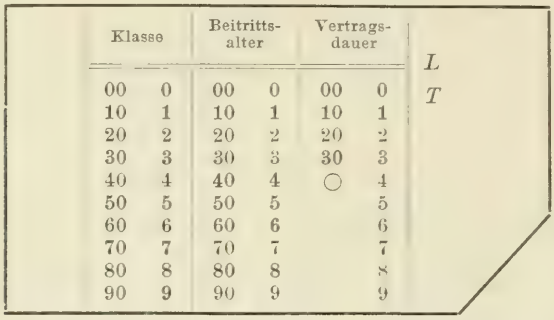
Die Maschinen zur Bildung von statistischen Gesamtheiten.

Die Zusammenfassung der Zähleinheiten zu Gesamtheiten erfolgt vielfach durch Maschinen. Der Vorteil der Verwendung der letzteren besteht nicht allein in der viel rascheren Durchführung, sondern auch in der größeren Sicherheit der Arbeit. Der hierbei bisher beobachtete Vorgang kann, ungeachtet der Variation in den Einzelheiten, in der Art charakterisiert werden, daß die Beobachtungselemente jeder Zähleinheit zunächst in einer für die maschinelle Aufbereitung leicht zugänglichen Form auf Zählkarten aufgetragen und sodann die Karten durch eine weitere Maschine nach Päcken gleicher Art gesichtet, eventuell auch sofort gezählt werden. Die Auftragung der Beobachtungselemente erfolgt auf Karten völlig gleicher und eigens angefertigter Art in der Weise, daß jedes Beobachtungselement durch die *Durchlochung* der Zählkarte an *bestimmter Stelle* ersichtlich wird.

Man kann sämtliche Manipulationen von der Anfertigung der Karte bis zur vollständigen Fertigstellung der Gesamtheiten durch Maschinen vornehmen lassen. Im ganzen kennt man dreierlei verschiedene Maschinen und zwar 1. eine Maschine zum Drucken und Abschneiden der Zählkarten; 2. eine Perforations- oder Durchlochungsmaschine; 3. eine Ordnungs- eventuell Zählmaschine. Im nachfolgenden sollen nun die bei der maschinellen Aufbereitung des Zählkartenmateriales zu beobachtenden Vorgänge durch Typen von Zählkarten und Maschinen verdeutlicht werden.

Die Zählkarte. Das Kartenmuster, welches über den Vorschlag des amerikanischen Versicherungstechnikers Mc. Clintock von einem Komité amerikanischer Techniker zur Erforschung der versicherten Leben entworfen wurde, ist $11\frac{1}{2}$ cm lang, 8 cm breit, in der Mitte

durchlocht, an der rechten unteren Ecke schief abgeschnitten und enthält drei Vertikalkolonnen zur Aufnahme der Daten (beifolgende Figur). Die hundert *Klassen*nummern dienen zur Charakteristik des



Risikos selbst. Die Durchlochung einer derselben zeigt an und zwar von

No. 1 Versicherungssumme 20000 Mk. oder mehr; No. 2 beantragte Versicherungssumme, von der Gesellschaft reduziert, No. 3 beantragte Versicherungssumme angenommen; No. 4—7 Unterschiede im Volksstamm; No. 8—42 Unterschiede in der Beschäftigung; No. 43—58 Besonderheiten im diagnostischen Befunde; No. 59—72 Besonderheiten in Gewicht und Heredität; No. 73 und 74 Besonderheiten in der Größe allein; No. 75 und 76 hereditäre Belastung allein; No. 77—98 Unterschiede im Wohnort. Eine Durchlochung des *L* bedeutet „lebend aus der Beobachtung geschieden", eine Durchlochung von *T*: „verstorben".

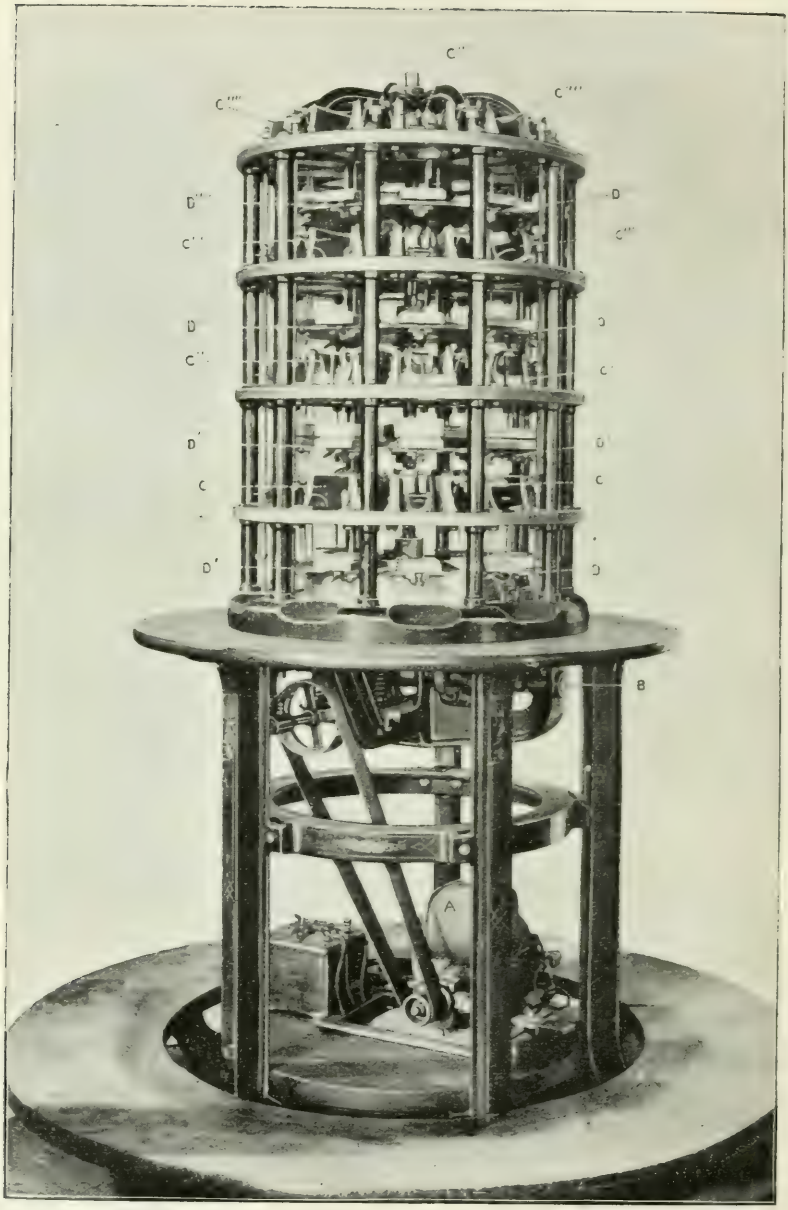
Es ist leicht ersichtlich, daß man die Nummern der Klassen auch zur Charakteristik anderweitiger Gesamtheiten verwenden kann.

Durch die obige Charakteristik der Klassen (die Darstellung aller Nummern von 1—100 durch Einer und Zehner) wird allerdings Raum erspart, doch kann selbstredend damit auf derselben Karte nur eine Klasse fixiert werden; behufs gleichzeitiger Charakteristik desselben Individuums nach mehreren Klassen, beispielsweise nach Beschäftigung und Wohnort, muß die Anzahl der Durchlochungsstellen entsprechend vermehrt werden.

Ganz ähnliche Karten dienen für die Darstellung der Zähleinheiten in der Bevölkerungsstatistik.

Die Perforationsmaschine von Gore. Die Perforationsmaschine (nebenstehende Fig. 1) enthält unter *F* so viele *Locheisen*,

Figur 1. Die Perforationsmaschine



Figur 2. Die Ordnungsmaschine

als die Karte mögliche *Lochstellen* besitzt (für die Herstellung der obigen Karten sind 57 Locheisen nötig; die Karten, welche bei der österr. Volkszählung des Jahres 1900 verwendet wurden, trugen 240 Lochstellen). Die Locheisen ruhen im festen Scharnier und endigen auf der einen Seite, der Lochbüchse (unter *E*) gegenüber, in den Lochspitzen, auf der anderen Seite (unter *F*) in Tastern. Die Manipulation geht so vor sich, daß 75 bis 100 Karten in die Kartenbüchse (unter *A*) hineingelegt und mit einer festen gewundenen Feder, welche im Hintergrunde der Figur steht, gegen die Vorderseite der Büchse gehalten werden. Durch Niederdrücken der Platte *B* wirft der Hebel *C* und die glockenförmige Kurbel *D* die oberste Karte des Paketes auf die rechte Seite in die Lochbüchse gegenüber den Locheisen bei *E*. Mittels der Taster bei *F* wird diese Karte nun durch einen Beamten auf Grund der Daten der Polize durchlocht. Durch abermaliges Niederdrücken der Platte *B* wird eine zweite Karte in die Lochbüchse geworfen, welche ihrerseits wieder die erste Karte auf der rechten Seite gegen den Hintergrund der Figur hinauswirft. Eine Klappe etwas unterhalb *E* bewegt sich gegen den Beamten, sobald die Platte *B* niedergedrückt ist und dient zu doppeltem Zwecke. Einerseits wird durch sie die erste Karte mit der Vorderseite nach unten geworfen, um die ursprüngliche Ordnung zu erhalten, andererseits die zweite Karte genau in die gewünschte Lage gegenüber den Locheisen gebracht.

Die Ordnungsmaschine von Gore. Die Ordnungsmaschine (Fig. 2) besteht im wesentlichen aus einer Trommel, welche in vier Fächer zur Aufnahme der zu ordnenden Karten geteilt ist und sich um eine feste Achse dreht. Die Bewegung der etwa $2\frac{1}{2}$ m hohen Maschine erfolgt durch einen Motor mit einer $\frac{1}{4}$ Pferdekraft bei *A*; die vier Fächer *C'*, *C''*, *C'''*, *C''''* dienen zur Aufnahme von je 10 kreisförmigen Schachteln, welche oben geöffnet und unten durch bewegliche Lippen (statt eines festen Untergrundes) geschlossen sind und einen Fassungsraum von ca. 200 Karten haben. Unter einer jeden Reihe von Schachteln ist eine sich drehende Scheibe *D'*, *D''*, *D'''*, *D''''*, auf welcher 10 ablösbare Platten in gleichen Entfernungen arrangiert sind. Die Platten sind von derselben Größe wie die Karten und jede Platte hat so viele Löcher, als Perforationsstellen auf den Karten existieren können. In der Ruhelage liegt je eine Platte unter je einer Schachtel und je ein Loch der Platte unter einer Lochstelle.

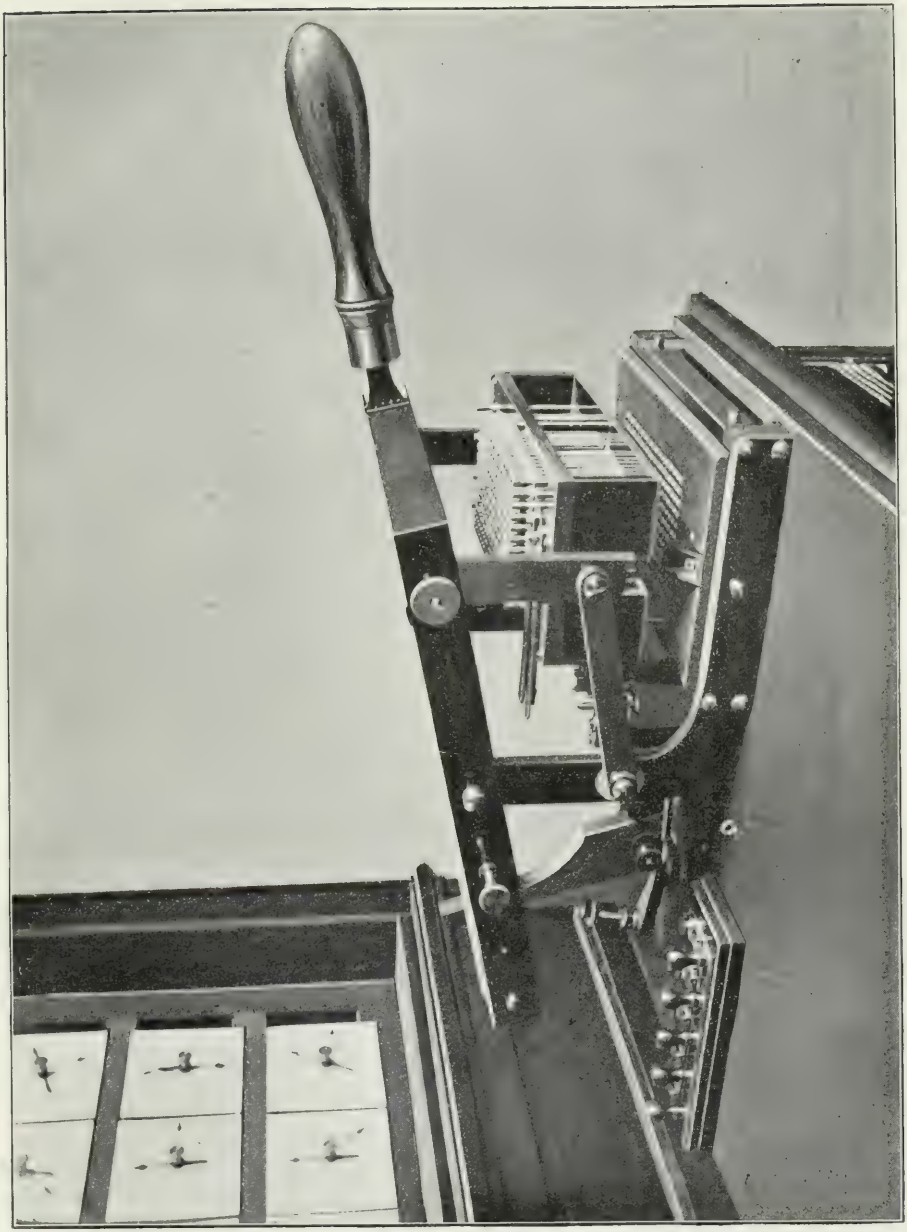
Nun erfolgt die Ordnung der Karten durch die nachstehenden Operationen. Zwei aufrechtstehende Stahlstifte werden in die dazu gehörigen Löcher einer jeden Platte eingesenkt. Einer derselben wird fortwährend unter der Perforierung im Mittelpunkte der Karte, der andere jeweilig unter der Perforationsstelle eines bestimmten Beobachtungselementes stehen.

Soll beispielsweise in einem Fache der Trommel nach Klassenzehnern geordnet werden, so wird der zweite Stift einer Platte genau unter 00, der zweite Stift der nächsten Platte genau unter 10, der zweite Stift der dritten Platte genau unter 20 zu liegen kommen usf. Nachdem nun alle 40 Büchsen der Ordnungsmaschine mit ungeordneten Karten gefüllt wurden, wird die Maschine in Bewegung gesetzt. Jede der sich drehenden Scheiben bewegt sich um $^1/_{10}$ des Umfanges derart, daß jede Platte unter eine Büchse zu ruhen kommt. Die Scheiben mit den Platten bewegen sich sodann automatisch aufwärts, bis die Spitzen der Stifte die Kartenpakete nach aufwärts halten. Zur selben Zeit bewegen sich die Lippen, welche die Karten unterstützt haben, automatisch zur Seite und die unterste Karte oder die untersten Karten, welche eine Perforierung an der Stelle des zweiten Stiftes tragen, fallen auf die Platte. Die Lippen kehren sodann wieder in ihre ursprüngliche Lage unter die Karten zurück und die Scheibe senkt sich, um die Operation zu wiederholen.

In wenigen Minuten sind die Büchsen leer und alle Karten nach der Stellung des zweiten Stahlstiftes geordnet. Jede Platte kann schnell entfernt und ihre Karten dürfen weggelegt werden, sobald die letzteren die Spitzen der Stifte erreichen oder die Büchsen geleert sind.

Sind die Karten nach einem Beobachtungselement (etwa nach Klassenzehnern) geordnet, dann wird durch Umstellung der Stifte die Ordnung nach Klasseneinheiten erfolgen.

Die Zählmaschine von Hollerith. Mit der Zählmaschine wird die direkte Auszählung eventuell auch Anordnung der nach den Erhebungsmomenten bereits perforierten Karten unter Verwendung von elektrischen Strömen durchgeführt. Zu diesem Behufe werden so viele Stromkreise konstruiert, als Perforationsstellen überhaupt vorhanden sind, die Ströme an den tatsächlich perforierten Stellen der Karten geschlossen, an den nicht perforierten unterbrochen, endlich mit diesen Strömen einerseits ein Zählwerk, andererseits eine Sortierungsvorrichtung (ein Fächerkasten) in Bewegung gesetzt.



Figur 3. Der Kontaktapparat

Die Zählmaschine besteht aus drei Hauptbestandteilen und zwar 1. dem Kontaktapparat, 2. dem Zählwerk mit der Relaisanlage, 3. dem Fächerkasten.

Der *Kontaktapparat* (nebenstehende Fig. 3) dient zur Öffnung und Schließung der Stromkreise, deren Unterbrechungsstelle einerseits durch ein System von feststehenden, mit Quecksilber gefüllten, durch eine Schicht aus Hartgummi getrennten Näpfchen, andererseits durch ein System von an einem Hebel befestigten, genau über den Quecksilbernäpfchen stehenden Nadeln gebildet wird. Die Näpfchen sind in eine Platte eingesenkt, welche die Form der Zählkarte hat und mit ihren Anschlägen am rückwärtigen und linken Rande bewirkt, daß deren Perforationsstellen über die Quecksilbernäpfe zu liegen kommen.

Die Spitzen der Nadeln reichen soweit herab, daß dieselben nach Herabsenken des Hebels — falls sie nicht durch eine unperforierte Stelle der Karte zurückgehalten werden — in die Quecksilbernäpfe tauchen und hierdurch den Strom schließen.

Das *Zählwerk* besteht aus einem System von Uhren und Relais je an Zahl gleich der Anzahl der Stromkreise (siehe Fig. 5). Die Uhren haben die Summe der vorgenommenen Schließungen der Stromkreise zu registrieren, die Relais die Aufgabe, jene Schließungen aus dem Zählwerke auszuschalten, welche für sich als Zähleinheit statistisch bedeutungslos bleiben.

Die Uhren sind in bekannter Art konstruiert und werden je für sich durch einen kleinen Elektromagneten in Bewegung gesetzt, dessen Anker bei jedem Kontakte mittels eines Häkchens in ein hundertteiliges Zahnrad eingreift und einen damit verbundenen Zeiger um einen Grad an der hundertteiligen Peripherie eines Zählblattes fortschiebt. Hat dieses Zahnrad eine volle Umdrehung gemacht, so schiebt es ein zweites, ebenfalls hundertteiliges Zahnrad um einen Zahn weiter, derart daß hierdurch ein zweiter Zeiger in Bewegung gesetzt wird. Auf solche Weise kann jede Uhr bis zu 10000 Fällen registrieren.

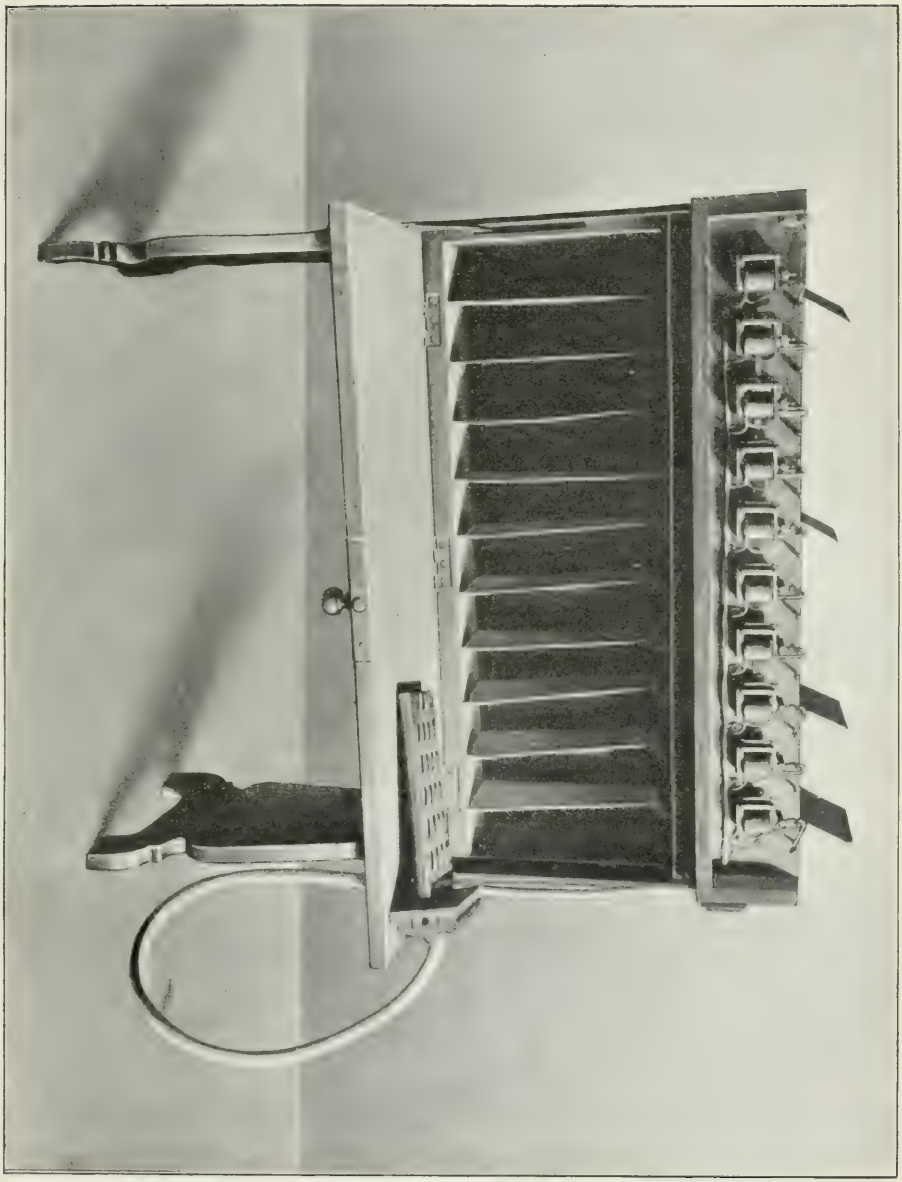
Die *Relais* sind kleine Elektromagnete, durch deren Induktionsspulen die Ströme eines Erhebungsmomentes hindurchgehen und welche bewirken, daß im Falle des Schlusses des Ankerhebels der durch ihn selbst hindurchgehende Stromkreis eines zweiten Erhebungsmomentes geschlossen wird. Darnach bleibt der Stromkreis des zweiten Erhebungsmomentes so lange unwirksam, als nicht gleichzeitig das erste Erhebungsmoment gezählt wird. Die Aufnahme des kombinierten Erhebungsmomentes erfolgt durch eine Uhr.

Ist beispielsweise zu ermitteln, wie viele Personen innerhalb des durch die gelochten Zählkarten repräsentierten Bevölkerungskomplexes 0—10, 10—20, 20—30, ... Jahre alt und wieviele innerhalb einer jeden Altersklasse ledig, verheiratet, verwitwet und geschieden sind, dann werden die zehn Altersklassenströme durch die Ankerhebel von zehn Systemen mit je vier Relais und die vier Familienstandsströme wieder durch die Induktionsspulen von je einem Relais aus den zehn Relaissystemen für die Altersklassen geleitet.

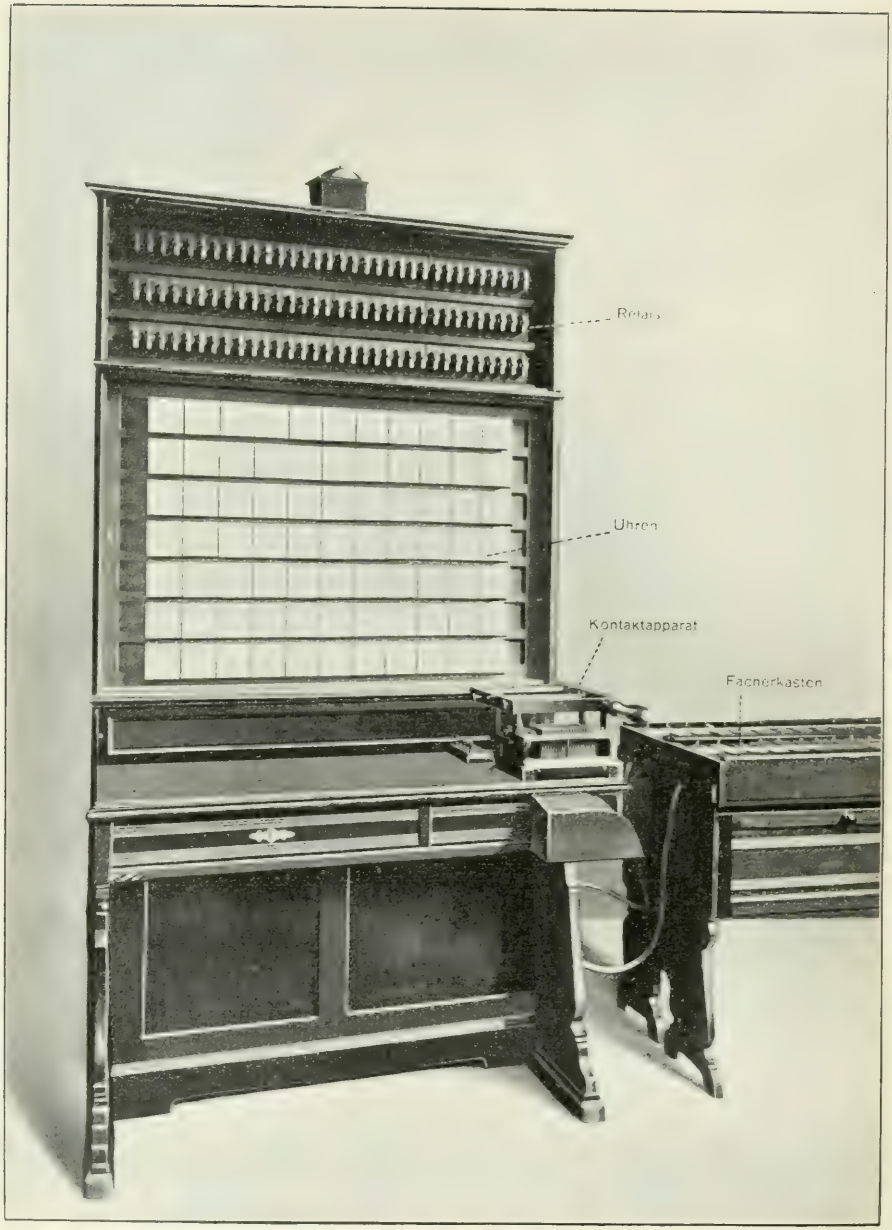
Der *Fächerkasten* (nebenstehende Fig. 4) endlich besteht aus zwei Reihen senkrecht stehender und wagerecht angereihter Fächer, deren jedes oben durch eine Klappe verschlossen ist. Die Klappen werden durch Federn in die Höhe gedrückt, an dem Aufspringen jedoch durch Widerstände (kleine Haken) gehindert. Diese Widerstände stehen mit dem Anker eines kleinen Elektromagneten in Verbindung. So oft ein Strom durch dessen Induktionsspule geht, wird auch die betreffende Klappe geöffnet und dem Arbeiter die Möglichkeit gegeben, in das dieser entsprechende Fach eine Karte einzulegen. Die Sortierung des Beobachtungsmateriales geht nun so vor sich, daß man die Elektromagneten des Fächerkastens in den Kontaktapparat einschaltet. Diese Einschaltung kann sehr verschieden und insbesondere unabhängig von der Arbeit des *Zählwerkes* erfolgen. Ja man kann durch Einschaltung eines anderen, als des im Zählwerke verwendeten Relaissystems die Anordnung der Zählkarten im Fächerkasten nach völlig anderen Gesichtspunkten als die Zählung im Zählwerke vornehmen. Zumeist wird allerdings die Kombination des Fächerkastens mit dem Zählwerke dazu benützt, die Sortierung und Zählung des Materiales nach mehr als zwei Verbindungen durchzuführen.

Die einzelnen hier erwähnten Bestandteile der Maschine sind in der folgenden Weise angeordnet (Fig. 5). Der Kontaktapparat okkupiert die vordere, rechte Ecke eines Tisches, hinter welchem sich ein Rahmen mit den Uhren und den Relais befindet. Von der Relaisanlage führen schlauchförmige Kabelleitungen zu dem Fächerkasten, welcher rechts vom Stuhle des Arbeiters aufgestellt ist. Vor dem Kontaktapparat ist ein Behälter für jene Karten angebracht, für welche keine Abteilung des Fächerkastens bestimmt ist.

Die Arbeit geht nun so vor sich, daß von dem am linken Teile des Tisches aufgestapelten und bereits durchlochten Kartenvorrat die Karten sukzessive in den Kontaktapparat eingeschoben werden. Nach Lenkung des Hebels des Kontaktapparates wird die Karte sodann von der Tischplatte abgehoben und in jenes Fach des Fächerkastens ge-



Figur 4. Der Fühlerapparat



Figur 5. Totalansicht der Zählmaschine

worfen, das sich eben geöffnet hat. Das geöffnete Blatt des Fächerkastens muß mit der Hand niedergedrückt werden.

Schließlich wird noch bemerkt, daß die Beschreibung und Darstellung der Maschinen von Gore im wesentlichen nach freier Übersetzung eines in Bd. XXXVII des Journal of the Inst. of Actuaries von Fackler erschienenen Aufsatzes und die Beschreibung der Hollerithschen Zählmaschine nach einem im allg. stat. Archiv v. Mayr (1891/92) erschienenen Aufsatze von Rauchberg erfolgt ist. Den Abbildungen der Teile der Zählmaschine liegen die dem Verfasser in liberalster Weise von dem Institute of Actuaries in London und der vereinigten Telephon- und Telegraphen-Fabriks-Aktien-Gesellschaft in Wien zur Verfügung gestellten Clichés und Negative zugrunde.

Anhang II.

Werte der Funktion $W_\gamma = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt.$

γ	W_γ	γ	W_γ	γ	W_γ
0,00	0,000	0,41	0,438	0,84	0,765
0,01	0,011	0,42	0,448	0,86	0,776
0,02	0,023	0,43	0,457	0,88	0,787
0,03	0,034	0,44	0,466	0,90	0,797
0,04	0,045	0,45	0,475	0,92	0,807
0,05	0,056	0,46	0,485	0,94	0,816
0,06	0,068	0,47	0,494	0,96	0,825
0,07	0,079	0,48	0,503	0,98	0,834
0,08	0,090	0,49	0,512	1,00	0,843
0,09	0,101	0,50	0,520	1,02	0,851
0,10	0,112	0,51	0,529	1,04	0,859
0,11	0,124	0,52	0,538	1,06	0,866
0,12	0,135	0,53	0,546	1,08	0,873
0,13	0,146	0,54	0,555	1,10	0,880
0,14	0,157	0,55	0,563	1,12	0,887
0,15	0,168	0,56	0,572	1,14	0,893
0,16	0,179	0,57	0,580	1,16	0,899
0,17	0,190	0,58	0,588	1,18	0,905
0,18	0,201	0,59	0,596	1,20	0,910
0,19	0,212	0,60	0,604	1,22	0,916
0,20	0,223	0,61	0,612	1,24	0,921
0,21	0,234	0,62	0,619	1,26	0,925
0,22	0,244	0,63	0,627	1,28	0,930
0,23	0,255	0,64	0,635	1,30	0,934
0,24	0,266	0,65	0,642	1,35	0,944
0,25	0,276	0,66	0,649	1,40	0,952
0,26	0,287	0,67	0,657	1,45	0,960
0,27	0,297	0,68	0,664	1,50	0,966
0,28	0,308	0,69	0,671	1,60	0,976
0,29	0,318	0,70	0,678	1,80	0,989
0,30	0,329	0,71	0,685	2,00	0,995
0,31	0,339	0,72	0,691	2,50	0,99959
0,32	0,349	0,73	0,698	2,87	0,99995
0,33	0,359	0,74	0,705	3,00	0,99998
0,34	0,369	0,75	0,711	3,50	1,00000
0,35	0,379	0,76	0,718		
0,36	0,389	0,77	0,724		
0,37	0,399	0,78	0,730		
0,38	0,409	0,79	0,736		
0,39	0,419	0,80	0,742		
0,40	0,428	0,82	0,754		

Literaturverzeichnis.

Die Lehre von den statistischen Gesamtheiten (I. Abschnitt).

Knapp, Über die Ermittlung der Sterblichkeit aus der Bevölkerung. Leipzig 1868.

—, Die Sterblichkeit in Sachsen. Leipzig 1869.

Zeuner, Abhandlungen aus der mathematischen Statistik. Leipzig 1869.

Becker, Zur Berechnung von Sterbetafeln an die Bevölkerungsstatistik zu stellende Anforderungen. Berlin 1874.

Knapp, Theorie des Bevölkerungswechsels. Braunschweig 1874.

Lexis, Einleitung in die Theorie der Bevölkerungsstatistik. Straßburg 1875.

Perozzo, Della representazione grafica di una collectiva etc. Annali di Statistica 1880.

Lexis, La représentation graphique de la mortalité au moyen des points mortuaires. Annales de démographie internationale IV. Paris 1880.

—, Bemerkungen über die demographischen Konstruktionen mit 2 und 3 Achsen. Conrads Jahrb. für Nationalök. und Statistik 1880.

Böckh, Jahrgang IX des Berliner statist. Jahrbuchs 1883 betreffend die Berliner Sterblichkeitstafeln.

Küttner, Die Eheschließungen in Sachsen. Zeitschrift des kgl. sächs. stat. Bureau 1885.

Bortkiewicz, Sterblichkeit und Sterblichkeitstafeln. Handwörterbuch der Staatswissenschaften von Conrad.

Blaschke, Über die Gesamtheiten von Lebenden und Toten in ihrer Abhängigkeit von Alter, Versicherungsdauer und Beobachtungszeit. Mitteilungen des österr.-ungar. Verbandes der Privat-Vers.-Anstalten 1905.

Roßmanith, ibidem unter dem gleichen Titel.

Die Arten der statistischen Maßzahlen und ihre Ermittlung (II. Abschnitt).

Süßmilch, Die göttliche Offenbarung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechtes. 1749.

Brune, Neue Sterblichkeitstafeln für Witwenkassen. Crelle Journal für reine und angewandte Mathematik 1837.

Fischer, Grundzüge des auf menschliche Sterblichkeit gegründeten Versicherungswesens. Oppenheim a./R. 1860.

Farr, Sterblichkeitstafeln für England. 1864

Firks, Preußische Sterbetafel. Zeitschrift des kgl. preuß. stat. Bureaus 1882.
Schweizerische Sterbetafel. Schweizer Statistik LVI. 1883.
Französische Sterbetafeln der Beobachtungen 1877/81. Statistic de la France XI. 1884.
Englische Sterblichkeitstafeln aus den Beobachtungen 1871 80. Supplements of the annual Rep. 1885.
Van Pesch, Niederländische Sterblichkeitstafel 1869 79. Beiträge des statist. Institutes 1885.
Becker, Deutsche Sterbetafel. Monatshefte zur Statistik d. deutsch. Reichs. 1887.
Zeuner, Sächsische Sterblichkeitstafeln aus den Beobachtungen des kgl. sächs. stat. Bureaus 1880/81 bis 1900/1901.
Tables exhibiting the law of mortality deduced from the comb. exp. of 17 Life Ass. Off. London 1843.
The mortality exp. of life ins. comp. London 1869.
Combin. exp. of assured lives (1863—1893). London 1900/1905.
Deutsche Sterblichkeitstafeln aus den Erfahrungen von 23 Lebensversicherungsgesellschaften. Berlin 1883.
Blaschke, Die Konstruktion einer Absterbeordnung von untersuchten männlichen Leben. Wien 1890.
Tables de mortalité du comité des compagnies d'assurance. Paris 1895.
Karup, Die Reform des Rechnungswesens der Gothaer Lebensversicherungsbank. Jena 1903.
Küttner, Invalidität und Invaliditätswahrscheinlichkeit der Steinkohlenbergleute. Zeitschrift für Berg-, Hütten- und Salinenwesen im preuß. Staate. 1881.
Caron, Die Reform des Knappschaftswesens und die allgemeine Arbeiterversicherung. Berlin 1882.
Beiblatt zu den amtlichen Nachrichten des Ministeriums des Innern betreffend die österr. Bergbruderladen. 1888 ff.
Gabaglio, Theoria generale della Statistica. Mailand 1888.
Westergaard, Die Lehre von der Mortalität und Morbilität. 2. Aufl. 1901.
Jahn, Invaliditäts- und Sterbensverhältnisse bei den Mitgliedern der allgem. Knappschafts-Pensionskasse für Sachsen (Zeitschrift des kgl. sächs. statist. Bureau). 1904.

Die Deutung der statistischen Maßzahlen (III. Abschnitt).

Cournot, Grundlehren der Wahrscheinlichkeitsrechnung. (Deutsch von Schnuse.) 1849.
Lexis, Das Geschlechtsverhältnis der Geborenen und die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Conrads Jahrb. f. Nationalök. und Statistik 1876.
—, Zur Theorie der Massenerscheinungen. Freiburg i./B. 1877.
Dormoy, Theorie mathematique des assurances sur la vie. Paris 1878.
Lexis, Theorie der Stabilität statistischer Reihen. Conrads Jahrb. f. Nationalök. und Statistik 1879.
Geigel, Die Stabilität des Geschlechtsverhältnisses der Gestorbenen. 1880.
Herrl, Über die Stabilität des Geschlechtsverhältnisses bei Mehrlingsgeburten. 1884
Lehr, Zur Frage der Wahrscheinlichkeit von weiblichen Geburten und Totgeburten. Zeitschrift für Staatswissenschaft und Verwaltung. 1889.

Westergaard, Grundzüge der Theorie der Statistik. Jena 1890.
Bortkiewicz, Kritische Betrachtungen zur theoretischen Statistik. Conrads Jahrb. für Nationalök. u. Statistik. 1895.
Fechner, Kollektivmaßlehre, herausgeg. von Lipps. Leipzig 1897.
Peek, Toepassing der Waarschijnlijkheids Rekening or Levensverzekering en Sterfte-Statistick. Dissertationsschrift. 1898.
Bohlmann, Über angewandte Mathematik. Leipzig 1900.
Blaschke, Die Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitslehre im Versicherungswesen. Wien 1900.
Lexis, Abhandlungen zur Bevölkerungs- und Moralstatistik. Jena 1903.
Czuber, Mathematische Statistik. 1903.
Wagner, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Lebensversicherung. Zeitschrift f. d. ges. Versicherungswissenschaft, Berlin 1906.

Statistische Gesetze (IV. Abschnitt).

Quettelet, Physique sociale Paris et Bruxelles 1869.
Wittstein, Das mathematische Gesetz der menschlichen Sterblichkeit. Hannover 1883.
Edgeworth, The representation of statistics by mathematical formulae. London 1896.
Dunker, Methode der Variationsstatistik. Leipzig 1899.
Blaschke, Über die analytische Darstellung von Regelmäßigkeiten bei unverbundenen statistischen Massenerscheinungen, Mitteilungen des Verbandes der österr.-ungar. Versicherungstechniker. I. Heft. Wien 1899.
Pearson, On the mathematical theorie of evolution. Phil. Trans. 1895. Vol. 186 A. p. 343 ff. 1895.

Anwendungen der Wahrscheinlichkeitslehre im Versicherungswesen (V. Abschnitt).

Tetens, Einleitung zur Berechnung der Leibrenten. Leipzig 1785/6.
Wittstein, Mathematische Statistik. Hannover 1868.
—, Das mathematische Risiko bei Versicherungsgesellschaften. Hannover 1885.
Mack, Das Risiko bei Lebensversicherungen. Wien 1891.
Landré, Math. techn. Kapitel zur Lebensversicherung. Jena 1895.
Hausdorf, Das Risiko bei Zufallsspielen. Ber. der kgl. sächs. G. d. W. Leipzig 1897.
Wagner, Das Problem vom Risiko in der Lebensversicherung. Jena 1898.
Czuber, Lebensversicherungsrechnung. Leipzig 1903.
Rädler, Das Risiko in der Lebensversicherung. Zeitschrift f. d. ges. Versicherungswissenschaft, Berlin 1904.

Die Theorie der Ausgleichung (VI. Abschnitt).

Zahlreiche Monographien im Journal of the Institute of Actuaries, beispielsweise:
Wollhouse, On interpolation, summation and the adjustement of numerical tables Vol. XII, ferner Vol. XV u. XXIII.

Higham, On the graduation of mortality tables (Vol. XXV).
Ackland, dito (Vol. XXIII).
Sprague, Explanation of a new formula for interpolation (Vol. XXII).
—, The graphic method of adjusting mortality tables (Vol. XXVI).

Ferner:

Fischer, Grundzüge des auf menschliche Sterblichkeit gegründeten Versicherungswesens, wie oben.
Wittstein, Mathematische Statistik. Hannover 1867.
Blaschke, Die Methoden der Ausgleichung von Massenerscheinungen. Wien 1893.
Karup, Über eine neue mechanische Ausgleichungsmethode. Transaktions of the second internat. act. Congress. London 1898.
Bohlmann, Ein Ausgleichsproblem. Nachrichten der kgl. Ges. d. Wissenschaft. Göttingen 1899.
Pearson, On the systematic fitting of curves to observations and measurements. Biometrika a Journal for the statistical study of biological problems. Cambridge 1902.
Graf, Eine vorteilhafte Methode zur Ausgleichung von Sterblichkeitsbeobachtungen nach der Gompertz-Makehamschen Formel. Mitteilungen des Verbandes der österr.-ungar. Privatversicherungsanstalten. Wien 1904.
Roßmanith, Die verschiedenen Methoden der Anwendung der Gompertz-Makehamschen Formel. Mitteilungen des Verbandes usw., wie oben. Wien 1906.

Berichtigungen.

Auf S. 8, Abs. 2 ist statt „Demographie und Demologie“ *Theorie der Bevölkerungs- und Moralstatistik, den Grundzügen einer Theorie der demographischen und demologischen Statistik* zu lesen.

Auf Seite 189, 6. Zeile von unten ist statt „Quadratsumme“ *Summe der Quadrate der Differenzen* zu lesen.

QA
276
B58

Blaschke, Ernst
Vorlesungen über
mathematische Statistik

Physical &
Applied Sci.

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY